Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 530.122.1(0.43)

На правах рукописи

Үсіпов Нұржан Мұсайыпұлы

Масштабная инвариантность гравитационных волн на космическом стохастическом фоне

6D061100 – Физика и астрономия

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель:
профессор
Жанабаев Зейнулла Жанабаевич

Зарубежный научный руководитель:
Кеведо Эрнандо
профессор
Национального Автономного Университета Мексики
г. Энсенада, Мексика

Республика Казахстан
Алматы, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОЙ АСТРОНОМИИ 11
1.1 Гравитационные волны в рамках общей теории относительности 11
1.1.1 Уравнения поля Эйнштейна и линеаризованная теория 12
1.1.2 Поляризации гравитационных волн 15
1.1.3 Генерация гравитационных волн 18
1.1.4 Энергия, переносимая гравитационными волнами 23
1.1.5 Гравитационные волны от двойных систем 26
1.2 Астрофизические источники гравитационных волн 32
1.2.1 Компактные двойные системы 33
1.2.2 Пульсары 35
1.2.4 Стохастический фон 37
1.3 Детекторы гравитационных волн 38
1.3.1 Наземные интерферометры 39
1.3.2 Харакристика шумов 45
1.3.3 Текущее состояние обнаружения и перспективы развития 50
1.3.4 Другие типы детекторов 52
1.4 Моделирование формы сигнала CBC 54
1.4.1 Параметризация компактных двойных систем 54
1.4.2 Моделирование формы сигнала 57
1.4.3 Эталонные формы сигналов 60
1.5 Заключение раздела 1 64
2 МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЙ И ВОЛНОВОЙ ХАРАКТЕР ПАРАМЕТРА ХАББЛА 65
2.1 Масштабная инвариантность аттрактора сигналов гравитационных волн 65
2.2 Фрактальная размерность множеств расширяющихся галактик 68
2.2.1 Критерии самоподобия Жанабаева 69
2.3 Заключение раздела 2 71
3. ИНФОРМАЦИОННО ЭНТРОПИЙНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН 72

3.1 Условная информация, определенная через разность энтропий. 72
3.2 Алгоритм определения разности условной информации 74
3.2.1 Генерация данных 74
3.2.2 Реализация алгоритма определения разности условных информаций. 75
3.3 Результаты численного анализа сигналов гравитационных волн 76
3.4 Заключение раздела 3 79
4 КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН 80
4.1. ДАННЫЕ И МЕТОДЫ 81
4.2. Результаты и обсуждение 84
4.3. Заключение раздела 4 88
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 90
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 91

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В настоящей диссертации применяются термины с соответствующими определениями.

ASD (Amplitude Spectral Density) – Амплитудный спектр плотности

AGN (Active Galactic Nuclei)– Активные галактические ядра

BBH (Binary Black Hole) – Двойная черная дыра

BNS (Binary Neutron Star) – Двойная нейтронная звезда

CBC (Compact Binary Coalescence) – Слияние двойных систем

CE (Cosmic Explorer) – Космический исследователь

CPTA (Chinese Pulsar Timing Array) – Китайская система синхронизации пульсаров

CMB (Cosmic Microwave Background) – Космический микроволновой фон

CNN (Convolutional neural network) – Свёрточная нейронная сеть

DWD (Double White Dwarfs) – Двойные белые карлики

DL (Deep Learning) – Глубокое обучение

EMRI (Extreme Mass Ratio Inspirals) – Взаимодействия с экстремальным отношением масс

ET (Einstein Telescope) – Телеско́п Эйнште́йна

EPTA (European Pulsar Timing Array) – Европейская система синхронизации пульсаров

FFT (Fast Fourier Transform) – Быстрое преобразование Фурье

FPR (False Positive Rate) – Коэффициент ложных срабатываний

GW (Gravitational Wave) – Гравитационная волна

GMST (Greenwich Mean Sidereal Time) – Гринвичское среднее звёздное время

GRB (Gamma-Ray Burst) – Гамма-всплеск

ISCO (Innermost Stable Circular Orbit) – Внутренняя устойчивая круговая орбита

IPTA (International Pulsar Timing Array) – Международная система синхронизации пульсаров

KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector) – Детектор Гравитационных Волн Камиока

LISA (Laser Interferometer Space Antenna) – Лазерная интерферометрическая космическая антенна

LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory) – Лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория

LVC (LIGO-Virgo Collaboration) – Коллаборация LIGO и Virgo

ML (Machine Learning) – Машинное обучение

MM (Mismatch) – Несоответствие

NSBH (Neutron Star Black Hole) – Нейтронная звезда–Черная дыра

NANOGrav (North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves) – Североамериканская наногерцовая обсерватория гравитационных волн

NR (Numerical Relativity) – Численная теория относительности

OTO – Общая теория относительности

PSD (Power Spectral Density) – Спектральная плотность мощности

PTA (Pulsar Timing Array) – Временная матрица пульсаров

PPTA (Parkes Pulsar Timing Array) – Временная матрица пульсаров Паркса

PN (Post-Newtonian Formalism) – Постньютоновский формали́зм

QNMs (Quasinormal Modes) – Квазинормальные моды

QFT (Quantum Field Theory) – Квантовая теория поля

SNR (Signal-to-Noise Ratio) – Отношение сигнал/шум

SGWB (Stochastic Gravitational Wave Background) Стохастический фон гравитационных волн

SPA (Stationary Phase Approximation) – Аппроксимации стационарной фазы

SMBBH (Supermassive Binary Black Holes) – Сверхмассивные двойные чёрные дыры

TTG (Transverse-Traceless Gauge) **–** калибровка поперечной и бесследовой формы

ZhF (Zhanabaev Fractal) – фрактал Жанабаева

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованию масштабной инвариантности самоподобных сигналов гравитационных волн, а также разработке и применению методов их обнаружения и классификации. В диссертации анализируется гравитационные волны в условиях космического стохастического фона, что требует использования новых теоретических подходов и эффективных инструментов обработки данных. В рамках исследования изучаются как теоретические аспекты слабых гравитационных волн, так и численные методы их регистрации, включая информационно-энтропийные подходы и алгоритмы машинного обучения.

В первой главе описывается современное состояние исследований природы гравитационных волн, обоснование их существования из общей теории относительности, а также обсуждаются их источники и методы регистрации. Приведены краткие сведения теоретическим основам гравитационно-волновой астрономии и проблемам регистрации сигналов на фоне космического шума лазерно-интерференционными методами.

Вторая глава посвящена исследованию масштабно-инвариантного характера слабых гравитационных волн вдали от источника. В известном уравнении волновое число определяется через точки лагранжа где модуль масштабного фактора расширения Вселенной принимается равным. Фазовое пространство полученного решения имеет показатель скейлинга односторонней эволюции (расширения), соответствующего ZhF (Жанабаев фракталу) и каталогам наблюдений.

Третья глава акцентирует внимание на применении условной информации разности энтропии фазового пространства и условной энтропии, предложенного Жанабаевым З.Ж., для анализа данных LIGO. Использованный метод позволяет обнаруживать сигналы гравитационных волн без использования модельных шаблонов, что особенно важно для анализа волн, возникающих на фоне космического шума.

Четвертая глава рассматривает вопросы классификации гравитационных волн, поступающих от различных источников, таких как слияния черных дыр и нейтронных звезд, с использованием условной информации разности энтропий. Описаны подходы к обучению нейронных сетей на данных коллаборации LIGO для повышения точности обнаружения и классификации волн.

В заключении подчеркивается важность развития методов нелинейной физики, вероятностных методов изучения гравитационных волн и обнаружения их на фоне космического шума, что открывает новые возможности для исследований в области космологии и астрофизики.

Таким образом, диссертация вносит значительный вклад в развитие теоретических и практических методов анализа гравитационных волн, предлагая новые подходы к их обнаружению и интерпретации на космическом фоне.

Актуальность темы исследования

Исследование гравитационных волн и их взаимодействие с космическим стохастическим фоном является одной из ключевых задач современной астрофизики и космологии. С момента первого прямого обнаружения гравитационных волн в 2015 году наблюдения этих волн открыли новое окно в изучении Вселенной. Гравитационные волны предоставляют информацию о таких экстремальных астрофизических процессах, как слияния черных дыр и нейтронных звезд, которые недоступны для наблюдений традиционными методами.

Однако, одной из главных проблем является сложность выделения слабых сигналов гравитационных волн на фоне шума, возникающего от различных космических и земных источников. В этих условиях особенно важным становится развитие новых методов анализа, таких как информационно-энтропийные методы, позволяющие улучшить точность обнаружения сигналов, а также изучение нелинейных вероятностных характеристик гравитационных волн, что помогает описать их поведение в условиях шумового фона.

Актуальность данной работы определяется необходимостью дальнейшего развития методов обнаружения и классификации гравитационных волн, а также углубленным теоретическим анализом их природы и взаимодействия с космическим фоном. Эти исследования важны для решения фундаментальных вопросов о структуре и эволюции Вселенной, а также для понимания роли гравитационных волн в космологических процессах.

Целью работы является исследование масштабной инвариантности гравитационных волн на космическом стохастическом фоне, а также разработка и внедрение новых методов их обнаружения и классификации.

Задачи исследования:

1 анализ сигналов уравнений гравитационных волн с учетом их фрактальной природы и их связи с параметром Хаббла;

2 применение нового метода условной информации разности энтропий для количественного обнаружения гравитационных волн в условиях хаотического и стохастического шума без использования модельных шаблонов;

3 применение методов условной информации, самоподобных значений информации и машинного обучения для классификации гравитационных волн по их источникам;

Объект исследования: Гравитационные волны, вызванные слиянием двойных массивных компактных объектов, таких как черные дыры или нейтронные звезды.

Методы исследования:

1 Исследование уравнений слабых гравитационных волн на основе общей теории относительности, определение фрактальной размерности аттрактора и его сопоставление с данными каталогов галактик.

2 Создание алгоритмов с применением информационно-энтропийного подхода для обнаружения гравитационных волн без необходимости использования модельных шаблонов сигналов, что позволяет повысить эффективность обнаружения волн.

3 Применение алгоритмов машинного обучения, таких как нейронные сети, для классификации гравитационных волн по источникам (слияние черных дыр, нейтронных звезд и систем черная дыра – нейтронная звезда).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Аттрактор слабых гравитационных волн имеет дробную часть фрактальной размерности 0.465 и имеет связь с параметром Хаббла, что позволяет выявить масштабно-инвариантные свойства гравитационно-волновых сигналов.

2. Новый метод обнаружения гравитационных волн на основе условной информации разности энтропии фазового пространства и условной энтропии позволяет регистрировать гравитационно-волновые сигналы при низком уровне отношения сигнал/шум (SNR).

3. Классификация источников гравитационных волн от двойных слияний черных дыр и нейтронных звезд с использованием условной информации разности энтропий и теоретических значений их самоподобия (критериев Жанабаева З.Ж.) обеспечивает точную идентификацию их сигналов при низком уровне SNR.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые:

1 Впервые предложена фрактальная модель для описания масштабной инвариантности гравитационных волн, которая позволяет объяснить процессы расширения Вселенной без привлечения концепций темной энергии.

2 Разработаны алгоритмы метода условной информации разности энтропий – нового информационно-энтропийного метода обнаружения гравитационных волн, который не требует использования модельных шаблонов сигналов.

3 Применены методы машинного обучения для классификации гравитационных волн на основе условной информации разности энтропий.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в разработке фрактальной модели, описывающей масштабную инвариантность гравитационных волн и расширение Вселенной без привлечения концепции темной энергии, что расширяет понимание структуры Вселенной и волновой природы гравитационных волн. Практическая значимость работы состоит в создании информационно-энтропийного метода для обнаружения гравитационных волн, который повышает точность регистрации сигналов, а также в применении методов машинного обучения для их классификации, что способствует автоматизации обработки данных и дальнейшему развитию гравитационно-волновой астрономии.

Личный вклад автора

В работе проведён теоретический анализ масштабной инвариантности гравитационных волн и их фрактальной природы, предложены новые подходы к описанию параметра Хаббла. Автор использовал условную информацию, основанную на разности энтропий, предложенную отечественным руководителем, и разработал алгоритмы обнаружения гравитационных волн, не требующие использования шаблонов сигналов. Автор также самостоятельно провёл численное моделирование гравитационных волн и реализовал

применение методов машинного обучения для классификации сигналов на основе данных LIGO.

Достоверность результатов

Расчеты основаны на уравнениях общей теории относительности и фрактальной теории, что придает теоретическую строгость моделям расширения Вселенной и гравитационных волн. Применение информационно-энтропийного метода для обнаружения гравитационных волн было протестировано на реальных и синтетических данных коллаборации LIGO, что подтверждает его эффективность и корректность. Численные эксперименты и моделирование проводились с использованием современных программных средств, таких как PyCBC, что обеспечивает точность и воспроизводимость результатов. Применение методов машинного обучения для классификации гравитационных волн также подтверждено анализом данных, что свидетельствует о надежности предложенных подходов.

Апробация работы

Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались:

– на Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі» (2021 Алматы, Казахстан);

На основе полученных результатов опубликованы 8 печатных работ.

Статьи с высоким импакт-фактором в базе данных Thomson Reuters или в изданиях, входящих в международную научную базу данных Scopus:

Ussipov N., Zhanabaev Z., Almat A., Zaidyn M., Turlykozhayeva D., Akniyazova A., & Namazbayev T. (2024). Classification of Gravitational Waves from Black Hole-Neutron Star Mergers with Machine Learning. Journal of Astronomy and Space Sciences, 41(3), 149–158.

Статьи в изданиях, рекомендуемых КОКСНВО РК:

Ussipov N., Akhmetali A., Zaidyn M., Akniyazova A., Sakan A., Kalambay M., & Shukirgaliyev B. (2024). Fractal Dimension of Star Clusters. Eurasian Physical Technical Journal, 21(3).

Усипов Н., Ахметали А., Зайдын М., Акниязова А., Акнур С., & Субебекова Г. (2024). Entropy of Gravitational Waves. Доклады НАН РК, (3), 47–56.

Жанабаев З. Ж., & Усипов Н. М. (2023). Information-Entropy Method for Detecting Gravitational Wave Signals. Eurasian Physical Technical Journal, 20(2 (44)), 79–86.

Жанабаев З. Ж., Усипов Н. М., Хохлов С. А. Scale-invariant and wave nature of the Hubble parameter //Eurasian Physical Technical Journal. – 2021. – Т. 18. – №. 2 (36). – С. 81-89.

Жанабаев З. Ж., & Усипов Н. М. (2019). Scale-Invariance of Many Galaxies. Вестник Казахского национального университета. Серия физическая, (2), 27–32.

Публикации в сборниках тезисов докладов:

Ахметали А., Үсіпов Н. М. Информациялық-энтропия әдісімен гравитациялық толқын көздерінің классификациясы. Материалы международной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». – Алматы, 2024.

Акниязова А. Ж., Жәңгірбай Д. М., Үсіпов Н. М. Галактикалардың корреляциялық өлшемділіктерін анықтау. Материалы международной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». – Алматы, 2019.

Связь темы диссертации с планами научных работ

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами прикладных научно-исследовательских работ КН МОН РК «Грантовое финансирование научных исследовании» по теме: «**AP14872061 -** Классификация типов модуляций шумовой смеси MIMO сигналов».

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 108 страницах машинописного текста, иллюстрируется 24 рисунками, приведены 193 формул, 3 таблиц, список использованных источников содержит 323 наименований.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОЙ АСТРОНОМИИ

Гравитационно-волновая астрономия является одной из наиболее развивающихся областей современной науки, предоставляя уникальные возможности для изучения Вселенной [1-4]. Первое прямое обнаружение гравитационных волн в 2015 году коллаборацией LIGO/Virgo стало важной вехой, подтвердив предсказания общей теории относительности Альберта Эйнштейна и открыв новое окно для наблюдений за космическими явлениями.

В данной главе рассматриваются теоретические основы гравитационных волн, начиная с уравнений поля Эйнштейна и их линеарного приближения, что позволяет выявить основные свойства гравитационных волн. Кроме того, исследуются астрофизические источники, которые генерируют гравитационные волны, включая слияния чёрных дыр и нейтронных звёзд. Также уделено внимание современным методам обнаружения гравитационных волн, которые используют лазерно-интерферометрические детекторы, такие как LIGO, Virgo и KAGRA.

Особое внимание уделяется моделированию формы сигналов для событий слияния компактных двойных систем (CBC). Это направление имеет ключевое значение, так как моделирование позволяет точно интерпретировать наблюдаемые сигналы и улучшать чувствительность детекторов.

Современные достижения в этой области продолжают открывать новые горизонты для фундаментальных исследований, стимулируя развитие астрофизики, космологии и междисциплинарных подходов к анализу данных.

1.1 Гравитационные волны в рамках общей теории относительности

Концепция гравитационных волн (GW), которые являются гравитационным эквивалентом электромагнитных волн, берёт своё начало в 1893 году, когда она была впервые предложена Оливером Хевисайдом. Однако теоретическое обоснование появилось лишь в 1916 году, когда Альберт Эйнштейн предсказал существование гравитационного излучения в пространстве-времени (т.е. гравитационных волн) в своей общей теории относительности (ОТО). В этой теории пространство-время рассматривается как искривлённое многообразие Римана, где гравитация описывается через кривизну пространства-времени, создаваемую массой и энергией.

Изначально существование гравитационных волн вызывало сомнения, включая скептицизм самого Эйнштейна. Причинами были проблемы с симметрией калибровки, неоднозначность формулировок и вопросы о реальном физическом значении гравитационных волн. Лишь в 1960-х годах было окончательно доказано, что гравитационные волны представляют собой корректно определённое явление, как с математической, так и с физической точки зрения. Это открытие положило начало интенсивному развитию теории гравитационных волн.

Гравитационные волны являются результатом ускоренного движения массивных объектов, таких как двойные чёрные дыры или нейтронные звёзды. Эти волны распространяются в пространстве-времени, вызывая его временные колебания, которые могут быть зарегистрированы современными детекторами. Гравитационные волны несут уникальную информацию о своих источниках, включая такие экстремальные явления, как слияние компактных объектов или коллапс массивных звёзд.

Современная теория гравитационных волн основывается на линеаризованном подходе, который позволяет описывать их как слабые возмущения метрики пространства-времени. Это упрощение делает возможным аналитическое и численное исследование гравитационных волн, а также их обнаружение в лабораторных условиях.

Важным направлением стало развитие технологий для детектирования гравитационных волн. Первое успешное прямое обнаружение гравитационных волн было осуществлено в 2015 году с использованием лазерного интерферометра LIGO. Это достижение подтвердило предсказания ОТО и открыло новую эпоху в астрономии. Сегодня детекторы, такие как LIGO, Virgo и KAGRA, регистрируют всё большее количество событий, позволяя исследовать эволюцию Вселенной, изучать свойства чёрных дыр, нейтронных звёзд и проверять фундаментальные законы физики.

Таким образом, гравитационные волны стали важным инструментом для изучения астрофизических процессов, которые ранее были недоступны для наблюдений традиционными методами, открывая новые горизонты в астрономии и космологии.

1.1.1 Уравнения поля Эйнштейна и линеаризованная теория

В общей теории относительности геометрия пространства-времени и распределение материи связаны через уравнения поля Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \,, \tag{1.1}$$

где $R_{\mu\nu}$– скаляр Риччи, $g_{\mu\nu}$– метрика пространства-времени, а $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса. Левая часть уравнения, часто называемая тензором Эйнштейна $G_{\mu\nu}$, описывает, как пространство-время искривляется; правая часть содержит информацию о массе (энергии), импульсе и напряжениях в этом пространстве-времени. Уравнения Эйнштейна раскрывают суть гравитации на более глубоком уровне, чем теория Ньютона. Гравитация в ОТО возникает из искривления пространства-времени, которое диктует, как движется материя, в то время как материя, в свою очередь, определяет, как пространство-время искривляется.

Уравнения поля Эйнштейна представляют собой тензорные уравнения, связывающие набор (0,2)-тензоров в четырёхмерном пространстве-времени. В полном виде эти уравнения представляют собой 16 связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Однако не все из них независимы.

По своей природе тензоры $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ являются симметричными ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$), что автоматически сокращает количество независимых компонентов до 10. Некоторую часть оставшихся степеней свободы можно зафиксировать с помощью калибровочной симметрии. Общая теория относительности инвариантна относительно всех возможных преобразований координат $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$, где x'^{μ} может быть любой дифференцируемой функцией от x^{μ}, обладающей обратной дифференцируемой функцией. Это свойство играет важную роль в формулировке теории и позволяет использовать свободу выбора координат для упрощения решения уравнений. Это позволяет выбирать удобные системы координат для упрощения уравнений Эйнштейна в различных сценариях, что мы и сделаем позже при рассмотрении линейного приближения уравнений Эйнштейна.

Рассмотрим возмущение в плоском пространстве-времени, метрика которого может быть разложена следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1, \tag{1.2}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – метрика Минковского для плоского пространства-времени, а $h_{\mu\nu}$ – возмущение метрики, представляющее собой отклонения пространства-времени. Поскольку любые производные $\eta_{\mu\nu}$ равны нулю, символы Христоффеля и тензор Римана могут быть легко вычислены в линейном приближении (т.е. игнорируя члены порядка $\mathcal{O}(h^2)$).

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\left(\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda}\,\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\,\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\rho}\,\partial_{\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\,\partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\,\partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\,\partial_{\mu} h_{\nu\sigma}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Свернув индексыμ и ρ, можно получить тензор Риччи $R_{\mu\nu}$. Затем, выполнив свёртку по индексам μ и ν, можно получить скаляр Риччи R:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\sigma}\,\partial_{\nu} h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\,\partial_{\mu} h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\,\partial_{\nu} h - \square\, h_{\mu\nu}\right), \tag{1.5}$$

$$R = \partial_{\mu}\,\partial_{\nu} h^{\mu\nu} - \square\, h, \tag{1.6}$$

где $\square = -\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = -\partial_0^2 + \nabla^2$ – оператор Д’Аламбера. Объединяя все выражения, можно записать тензор Эйнштейна в линейном приближении с учётом возмущений (уравнение 1.2).

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\sigma}\,\partial_{\nu} h^{\sigma}{}_{\mu} + \partial_{\sigma}\,\partial_{\mu} h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_{\mu}\,\partial_{\nu} h - \square\, h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu} h^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\,\square\, h\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Выражение выше можно дополнительно упростить, введя понятие следообращённой части $h_{\mu\nu}$, аналогично связи между тензором Риччи и тензором Эйнштейна.

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{1.8}$$

где $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ – след тензора $h_{\mu\nu}$. След тензора $\bar{h}_{\mu\nu}$ равен $-h$, и то же самое преобразование, применённое к $\bar{h}_{\mu\nu}$, позволяет вернуть $h_{\mu\nu}$. Тензор Эйнштейна можно выразить через $\bar{h}_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\square\,\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\,\partial^{\rho}\,\partial^{\sigma}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\,\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^{\rho}\,\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\rho}\right). \tag{1.9}$$

Как упоминалось ранее, общая теория относительности инвариантна относительно всех возможных гладких преобразований координат. Мы стремимся найти такую систему координат, которая упростит уравнение (1.9). Интуитивно, если $\bar{h}_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию калибровки Лоренца (аналогичному условию Лоренца в электродинамике $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$), то:

$$\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.10}$$

тогда последние три члена в уравнении (1.9) исчезнут. Можно доказать, что это возможно. Рассмотрим следующее преобразование координат:

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x). \tag{1.11}$$

Метрика преобразуется следующим образом:

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\,g_{\rho\sigma}(x) \tag{1.12}$$

Предполагая, что производные ξ^{μ} имеют тот же порядок, что и $h_{\mu\nu}$, и подставляя уравнения (1.2) и (1.8), $\bar{h}_{\mu\nu}$ преобразуется в:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\,\partial_{\rho}\xi^{\rho}\right), \tag{1.13}$$

и, следовательно:

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \to \left(\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}\right)' = \partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} - \square\,\xi_{\mu}. \tag{1.14}$$

Это означает, что если условие калибровки Лоренца не выполняется в текущей системе координат, т.е. $\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = f_{\mu}(x) \neq 0$, всегда можно найти новую систему координат с помощью преобразования, заданного уравнением (1.11), так, чтобы:

$$\square \xi_\mu = f_\mu(x), \tag{1.15}$$

это возможно, так как оператор Д'Аламбера обратим, и, следовательно, в новой системе координат условие калибровки Лоренца будет выполнено. Другими словами, мы всегда можем принять условие калибровки Лоренца. Решение уравнения (1.15) выражается через функцию Грина для оператора Д'Аламбера.

$$\xi_\mu(x) = \int d^4x G(x-y) f_\mu(y), \tag{1.16}$$

где

$$\square_x G(x-y) = \delta^4(x-y). \tag{1.17}$$

Возвращаясь к уравнениям поля, поскольку последние три члена в уравнении (1.9) обнуляются при выполнении условия калибровки Лоренца, уравнения поля с линейным возмущением упрощаются до волнового уравнения (отсюда и название «гравитационные волны»).

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.18}$$

Изначально существует десять степеней свободы, но условие калибровки Лоренца накладывает четыре ограничения, оставляя только шесть степеней свободы. Некоторые из них могут быть дополнительно зафиксированы с помощью дополнительных калибровок, что будет рассмотрено в следующем разделе.

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0, \tag{1.19}$$

это соответствует закону сохранения тензора энергии-импульса.

Вычисления, связанные с возмущениями метрики и приближениями до линейного порядка, как показано выше, относятся к линеаризованной теории. Линеаризованная гравитация эффективна, когда гравитационное поле слабо, что часто бывает в случае гравитационных волн. Для возмущений на искривлённом фоне возникает проблема разделения фона и волн. Трудно чётко отличить искривление пространства-времени от малых флуктуаций, накладывающихся на него. Однако на макроскопическом уровне кривизна пространства-времени и флуктуации могут иметь разные масштабы длины и, следовательно, быть разделяемыми. Это особенно важно, когда речь заходит об энергии, переносимой гравитационными волнами. Долгое время велись споры о том, могут ли гравитационные волны переносить энергию, и существует ли для них строго определённый тензор энергии-импульса. Ответ положительный, и подробности можно найти, например, в работах [5, 6].

1.1.2 Поляризации гравитационных волн

Рассмотрим распространение гравитационных волн в вакууме. Правая часть уравнения (1.18) обращается в ноль, что приводит к:

$$\square\, \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.20}$$

а решение в виде плоской волны имеет следующий вид:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \tag{1.21}$$

где $k_\sigma = (\omega, k_1, k_2, k_3)$ – четырёхмерный волновой вектор, x^σ – вектор положения, а $C_{\mu\nu}$ – симметричный тензор поляризации гравитационных волн. Подставляя решение уравнения (1.21) обратно в волновое уравнение (1.20), получаем:

$$k^\mu k_\mu = 0, \tag{1.22}$$

это означает, что волновой вектор ортогонален тензору поляризации, что устраняет четыре степени свободы из $C_{\mu\nu}$. В результате остаётся шесть независимых компонент $C_{\mu\nu}$, что соответствует числу независимых уравнений в (1.20). Однако условие калибровки Лоренца $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ не полностью фиксирует все степени свободы: всё ещё возможно выполнить преобразование координат $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$, не нарушая калибровку Лоренца, если ζ^μ удовлетворяет уравнению $\square\, \zeta^\mu = 0$. Существует ещё четыре дополнительные степени свободы в ζ^μ, которые нужно зафиксировать. В итоге остаётся только две степени свободы. Для фиксации ζ^μ используется следующий алгоритм:

1. Первый компонент ζ^0 можно выбрать так, чтобы след $\bar{h} = 0$. После этого выполняется $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, и штрих над $h_{\mu\nu}$ можно опустить.
2. Три пространственные компоненты ζ^i можно выбрать так, чтобы $\bar{h} = 0$. Подставляя это в условие калибровки Лоренца, получаем $\partial_0 h^{00} = 0$, что означает, что h^{00} является константой. Эту константу также можно обнулить с помощью тривиального преобразования координат. Объединяя эти условия, получаем $h^{0\mu} = 0$.

На самом деле, ζ^μ может быть определена таким образом, чтобы она удовлетворяла как волновому уравнению, так и указанным выше требованиям калибровки:

$$\begin{cases} \zeta_\mu = B_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ B_0 = -\frac{i}{2k_0}\left(C_{00} + \frac{1}{2}C^\mu_\mu\right) \\ B_j = \frac{i}{2k_0^2}\left[-2k_0 C_{0j} + k_j\left(C_{00} + \frac{1}{2}C^\mu_\mu\right)\right] \end{cases} \tag{1.24}$$

В итоге тензор поляризации $C_{\mu\nu}$ (или решение $h_{\mu\nu}$) обязан соответствовать следующим условиям:

$$C^{0\mu} = 0, C^i_i = 0, \partial^i C_{ij} = 0, \tag{1.25}$$

эти условия вместе определяют калибровку поперечной и бесследовой формы (TTG). При этой калибровке остаточной свободы выбора координат не остаётся, а гравитационные волны характеризуются только двумя независимыми поляризациями. Рассмотрим гравитационные волны, распространяющиеся вдоль

направления z, и решение в виде плоской волны (уравнение 1.21). Возмущение метрики в этом случае можно выразить следующим образом:

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \cos[\omega(t-z)]$$
$$= \left(h_+ C_+ + h_\times C_\times\right)_{\mu\nu} \cos[\omega(t-z)]\Big], \tag{1.26}$$

и

$$C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Эти два тензора поляризации гравитационных волн называются поляризациями «плюс» и «крест» (Рисунок 1.1). Они соответственно изменяют собственное расстояние (а следовательно, и движение тестовых частиц) вдоль направлений «плюс» и «крест». Рассмотрим интервал пространства-времени ds^2:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + 1 + h_+ cos[\omega(t-z)]\,dx^2 + 1 - h_+ cos[\omega(t-z)]\,dy^2 + 2h_\times cos[\omega(t-z)]\,dxdy + dz^2, \tag{1.28}$$

и две точки на оси x с координатами x_1 и $x_2 (x_2 - x_1 = L)$. Когда через них проходит гравитационная волна, содержащая только поляризацию «плюс», собственное расстояние между этими двумя точками определяется следующим образом:

$$s = (x_2 - x_1)[1 + h_+ \cos(\omega t)]^{1/2} \simeq L\left[1 + \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t)\right]. \tag{1.29}$$

Поскольку C_+ имеет только две ненулевые противоположные компоненты на xx и yy, собственное расстояние между x_1 и x_2 периодически изменяется вдоль направлений x и y: направление x растягивается, а направление y сжимается, после чего эти изменения чередуются, формируя форму «+». Аналогично, эффект крестовой поляризации представляет собой поворот на 45° относительно поляризации «плюс». Этот эффект можно также визуализировать, рассматривая круг из неподвижных тестовых масс в плоскости $x - y$. Разделение тестовых масс S^μ описывается уравнением геодезической девиации:

$$\frac{D^2}{D\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma, \tag{1.30}$$

где $\frac{D}{D\tau}$ – ковариантная производная, а U^{ν}– четырёхскорость тестовых масс. В первом порядке приближения поправки к U^{ν}, вызванные h, можно пренебречь, так что U^{ν} просто равен (1, 0, 0, 0). Кроме того, для медленно движущихся частиц можно принять $\tau \sim t$. Тензор Римана в этом случае упрощается до $R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}\partial_0\,\partial_0 h_{\mu\sigma}$, и уравнение геодезической девиации принимает вид:

$$\ddot{S}^{\mu} = \frac{1}{2}\ddot{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}S^{\nu}. \tag{1.31}$$

Рассмотрим $\delta x = S^1 - x_0$ и $\delta y = S^2 - y_0$. Эти величины можно легко определить, разделяя эффекты поляризаций «плюс» и «крест»:

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2}x_0 \sin\omega\, t, \delta y(t) = -\frac{h_+}{2}y_0 \sin\omega\, t(\text{plus}),$$
$$\delta x(t) = \frac{h_\times}{2}y_0 \sin\omega\, t, \delta y(t) = \frac{h_\times}{2}x_0 \sin\omega\, t(\text{cross}). \tag{1.32}$$

Движение тестовых масс иллюстрируется на рисунке 1.1. Поляризации h_+ и $h_\times$ вызывают растяжение и сжатие кольца в разных направлениях, формируя фигуры в виде «+» и «×».

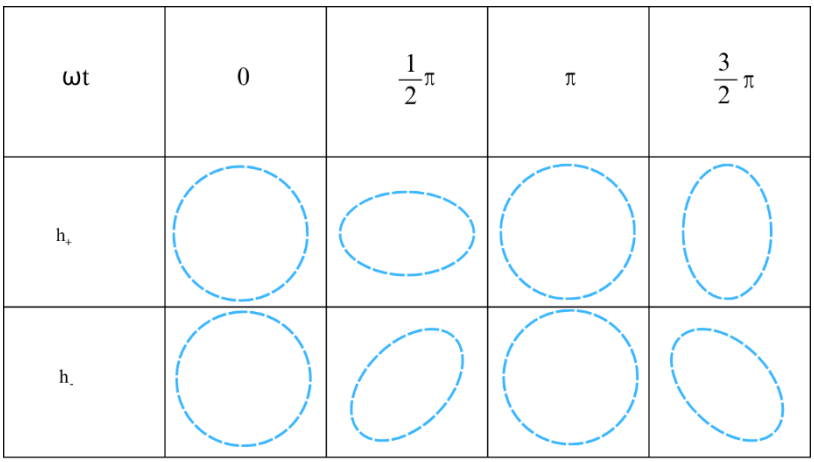


Рисунок 1.1 - Иллюстрация эффектов двух поляризаций гравитационных волн. Тестовые массы расположены в виде кольца в плоскости $x - y$, и это кольцо растягивается и сжимается при прохождении гравитационной волны с поляризацией «плюс» (средний ряд) и «крест» (нижний ряд) вдоль оси z

1.1.3 Генерация гравитационных волн

Решение в виде плоской волны демонстрирует, как гравитационные волны ведут себя в вакууме. Однако, чтобы понять, как гравитационные волны генерируются физическими источниками, необходимо решить уравнение (1.18). Для этого можно использовать тот же метод, что и при решении уравнения (1.16), с функцией Грина, определённой в уравнении (1.17).

Однако в данном случае мы рассматриваем волны, которые распространяются вперёд во времени: волны в точке с координатой x^i в момент времени x^0 генерируются источником в точке y^i в момент времени t^0, предшествующий x^0. Поэтому для решения необходимо использовать запаздывающую функцию Грина.

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta[|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - (x^0 - y^0)]\theta(x^0 - y^0), \quad (1.33)$$

где $\mathrm{x} = (x^1, x^2, x^3), \mathrm{y} = (y^1, y^2, y^3)$ – пространственные векторы, а $\theta(x^0 - y^0) = 1$, когда $x^0 - y^0 > 0$, и 0 в противном случае. Решение для гравитационной волны тогда записывается как:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) &= -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y \\ &= 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3y.\end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь $x^\sigma = (t, \mathbf{x})$. Во второй строке интегрирование по y^0 ограничено значением $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, то есть запаздывающим временем t_r . Физический смысл уравнения (1.34) очевиден: возмущение гравитационного поля в точке $(t, \mathbf{x})$ возникает как результат накопленного влияния материи, расположенной в точке $\mathbf{y}$ в момент запаздывающего времени t_r.

Выполняется преобразование Фурье для $\bar{h}_{\mu\nu}$. Прямое и обратное преобразования Фурье определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}), \\ \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}),\end{aligned} \quad (1.35)$$

Преобразование Фурье для $\bar{h}_{\mu\nu}$ можно вычислить, используя преобразование Фурье для источника $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r,\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \\ &= 4G \int d^3y e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.\end{aligned} \quad (1.36)$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения мы рассмотрим гравитационные волны от далёкого изолированного источника и предположим, что источник движется с небольшой скоростью. При первом приближении источник можно считать находящимся на расстоянии $R \approx |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, а его размер δR значительно меньше R. Во втором приближении можно сделать вывод, что $\omega\delta R \ll 1$, то есть движение частей источника намного медленнее скорости распространения гравитационных волн (света). Объединив эти условия, можно заменить $e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ на $e^{i\omega R}/R$, что позволяет извлечь это выражение из подынтегрального.

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega R}}{R} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}). \quad (1.37)$$

Таким образом, нам нужно лишь вычислить интеграл от $\tilde{T}_{\mu\nu}$ по пространственным координатам. Это можно сделать с помощью интегрирования по частям и применения закона сохранения (уравнение 1.19). Например, для $\tilde{T}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\int d^3y\tilde{T}^{ij}(\omega,\mathbf{y}) &= \int \partial_k\left(y^i\tilde{T}^{kj}\right)d^3y - \int y^i\left(\partial_k\tilde{T}^{kj}\right)d^3y \\ &= i\omega\int y^i\left(\tilde{T}^{0j}\right)d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2}\int\left[\partial_l\left(y^iy^j\tilde{T}^{0l}\right) - y^iy^j\left(\partial_l\tilde{T}^{0l}\right)\right]d^3y \\ &= -\frac{\omega^2}{2}\int y^iy^j\tilde{T}^{00}d^3y.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Здесь мы дважды применили интегрирование по частям (в первой и третьей строках) и отбросили граничные члены, так как источник является изолированным. Во второй и четвёртой строках использовался закон сохранения в частотной области:

$$\partial_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_0\tilde{T}^{0\nu} + \partial_i\tilde{T}^{i\nu} = i\omega\tilde{T}^{0\nu} + \partial_i\tilde{T}^{i\nu} = 0. \tag{1.39}$$

Массивный квадрупольный момент источника определяется следующим образом:

$$Q_{ij}(t) = \int y^iy^jT^{00}(t,\mathbf{y})d^3y, \tag{1.40}$$

решение в частотной области можно записать следующим образом:

$$\tilde{\bar{h}}_{ij}(\omega,\mathbf{x}) = -2G\omega^2\frac{e^{i\omega R}}{R}\tilde{Q}_{ij}(\omega), \tag{1.41}$$

преобразование во временную область:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{ij}(t,\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2G}{R}\int d\omega e^{-i\omega(t-R)}\omega^2\tilde{Q}_{ij}(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2G}{R}\frac{d^2}{dt^2}\int d\omega e^{-i\omega t_r}\tilde{Q}_{ij}(\omega) \\ &= \frac{2G}{R}\ddot{Q}_{ij}(t_r),\end{aligned} \tag{1.42}$$

уравнение 1.42 представляет собой формулу квадрупольного излучения. Временные компоненты $\bar{h}_{\mu\nu}$ задаются условием калибровки Лоренца (уравнение 1.10).

$$\tilde{\bar{h}}^{0\nu} = \frac{i}{\omega}\partial_i\tilde{\bar{h}}^{i\nu}. \tag{1.43}$$

Следует отметить, что временные компоненты $\bar{h}_{\mu\nu}$ исчезают в TTG-калибровке. Тензоры, которые не находятся в TTG-калибровке, могут быть преобразованы в TTG-калибровку с помощью следующего метода:

$$\bar{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} = \Lambda_{ij,k\ell}\bar{h}_{k\ell}, \tag{1.44}$$

где проектор Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda_{ij,k\ell}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik}P_{j\ell} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{k\ell}, P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j, \tag{1.45}$$

где n_i – направление распространения гравитационной волны. Таким образом, пространственные компоненты в TTG-калибровке должны быть записаны следующим образом:

$$\bar{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{R}\ddot{\Lambda}_{ij,k\ell}Q_{kl}(t_r) = \frac{2G}{R}\ddot{Q}_{ij}^{\mathrm{TT}}(t_r). \tag{1.46}$$

Это показывает, что основной член гравитационного излучения – квадрупольное излучение, которое пропорционально второй производной квадрупольного момента массы. В отличие от электромагнитного излучения, гравитационное излучение в рамках ОТО не содержит дипольного излучения. Это связано с тем, что изменения дипольного момента массы соответствуют движению центра масс, а в ОТО всегда можно выбрать систему координат, в которой движение центра масс устраняется.

Квадрупольный момент обычно значительно меньше дипольного, так как он является описанием более высокого порядка формы системы. Из-за слабой природы гравитации можно сделать вывод, что гравитационное излучение также чрезвычайно слабое. Это можно увидеть, если записать уравнение (1.46) в Международной системе единиц (СИ): коэффициент $2G/R$ превращается в $2G/R^4$. Для источника гравитационных волн на расстоянии 1 Мпк это даёт фактор порядка 5×10^{-67}! Это делает обнаружение гравитационных волн крайне сложной задачей, что привело Эйнштейна к выводу, что, хотя гравитационные волны существуют, их вряд ли удастся когда-либо зарегистрировать. Однако Эйнштейн недооценил быстрое развитие технологий и настойчивость учёных. В 2015 году лазерный интерферометрический гравитационно-волновой обсерватории (LIGO) удалось впервые напрямую зарегистрировать гравитационные волны от слияния двойных чёрных дыр (BBH) [7]. Более подробная информация об этом будет представлена в следующих разделах.

Мы также заинтересованы в угловом распределении гравитационных волн, поскольку наблюдение источников гравитационных волн зависит от определённого угла обзора. Рассмотрим геометрию, как показано на рисунке 1.2: существует декартова система координат (x, y, z) в системе источника, а линия зрения наблюдателя направлена вдоль вектора $\hat{\mathbf{n}}$. Угол между $\hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ обозначается как θ. Для удобства вводится другая декартова система координат (x', y', z') для наблюдателя, где $\widehat{\mathbf{z}'} = \hat{\mathbf{n}}$, а проекция $\widehat{\mathbf{z}'}$ на плоскость (x, y) образует угол ϕ относительно оси y. Цель состоит в вычислении h_+^{TT} и $h_\times^{\mathrm{TT}}$ для наблюдателя, то есть в системе координат наблюдателя, используя уравнение (1.46).

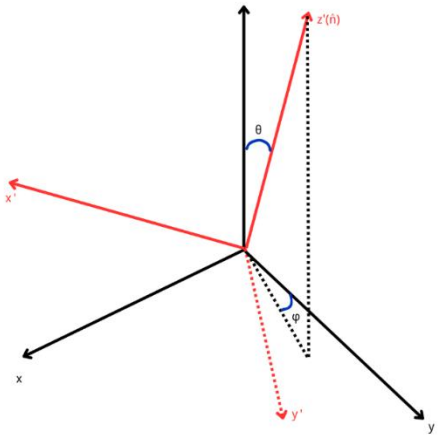


Рисунок 1.2 - Соотношение между системой координат источника (x, y, z) и системой координат наблюдателя(x', y', z'). Линия зрения наблюдателя направлена вдоль оси z', угол между $\hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ обозначается как θ. Проекция оси $\widehat{\mathbf{z}'}$ на плоскость (x, y) образует угол ϕ относительно оси y

Первым шагом будет определение квадрупольного момента массы в TTG-калибровке. Заметим, что при $\hat{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{z}'}$проектор P_{ij} в уравнении (1.45) становится диагональной матрицей diag(1, 1, 0). Следовательно, в системе координат (x', y', z') производная квадрупольного момента массы Q'_{ij} после применения TTG-проекции может быть вычислена следующим образом:

$$\ddot{Q}'^{\mathrm{TT}}_{ij} = \Lambda_{ij,kl}\ddot{Q}'_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22})/2 & \ddot{Q}'_{12} & 0 \\ \ddot{Q}'_{21} & -(\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}. \quad (1.47)$$

Тогда поляризации «плюс» и «крест» для наблюдателей в направлении $\hat{\mathbf{n}}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_+(t, \hat{\mathbf{n}}) &= \frac{G}{r}\left(\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22}\right) \\ h_\times(t, \hat{\mathbf{n}}) &= \frac{2G}{r}\ddot{Q}'_{12}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

наконец, в результате преобразования координат Q'_{ij} связан с квадрупольным моментом массы в системе источника Q_{ij} следующим образом:

$$Q_{ij} = \mathcal{R}_{ik}Q'_{kl}\mathcal{R}_{jl}, \quad (1.49)$$

где:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

В заключение можно вычислить квадрупольный момент массы в системе координат источника без учета TT-калибровки, затем преобразовать его в систему координат наблюдателя с помощью уравнения (1.49), после чего поляризации гравитационных волн, наблюдаемые в данной системе, определяются уравнением (1.48).

1.1.4 Энергия, переносимая гравитационными волнами

Гравитационные волны (GW) переносят энергию, однако определение энергии гравитационных волн сталкивается с рядом концептуальных трудностей [5]. Во-первых, энергия гравитационных полей не может быть определена локально, как это возможно для электромагнитных полей. Электромагнитные поля по своей природе являются материей, которая "имеет массу", искривляет пространство-время и оставляет наблюдаемые следы. В случае гравитационных полей это не так. Принцип эквивалентности утверждает, что локальная кривизна всегда может быть устранена с помощью преобразований координат. Без гравитационного поля нельзя однозначно определить локальную гравитационную энергию. Таким образом, гравитационная энергия, включая энергию гравитационных волн, всегда должна определяться на макроскопическом уровне. Во-вторых, при рассмотрении энергии гравитационных волн (т.е. их тензоров энергии-импульса) необходимо учитывать их влияние в уравнениях поля Эйнштейна, так как они, в свою очередь, искривляют фоновое пространство-время. В предыдущих разделах мы рассматривали возмущения плоского пространства-времени, чтобы выделить гравитационные волны. Теперь, с учётом искривлённого фона, необходимо обеспечить, чтобы длина волны гравитационных волн λ_{GW} была значительно меньше масштаба пространственных изменений фонового гравитационного поля L_{BG} , т.е. $\lambda_{GW} \ll L_{BG}$. Только при выполнении этих условий имеет смысл обсуждать энергию гравитационных волн.

Уравнения поля Эйнштейна могут быть переписаны в следующем виде:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{1.51}$$

и мы раскладываем тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ до порядка $\mathcal{O}(h^2)$:

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \cdots, \tag{1.52}$$

где $\bar{R}_{\mu\nu}$ обусловлен только фоновым метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}^{(1)}$ относится к порядку $\mathcal{O}(h)$, а $R_{\mu\nu}^{(2)}$ – к порядку $\mathcal{O}(h^2)$. Их явные выражения следующие [6]:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\mu}h_{\nu\alpha} + \bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\nu}h_{\mu\alpha} - \bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}h\right), \tag{1.53}$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\overline{\nabla}_{\mu}h_{\rho\alpha}\overline{\nabla}_{\nu}h_{\sigma\beta} + \left(\overline{\nabla}_{\rho}h_{\nu\alpha}\right)\left(\overline{\nabla}_{\sigma}h_{\mu\beta} - \overline{\nabla}_{\beta}h_{\mu\sigma}\right)\right]$$
$$+h_{\rho\alpha}\left(\overline{\nabla}_{\nu}\overline{\nabla}_{\mu}h_{\sigma\beta} + \overline{\nabla}_{\beta}\overline{\nabla}_{\sigma}h_{\mu\nu} - \overline{\nabla}_{\beta}\overline{\nabla}_{\nu}h_{\mu\sigma} - \overline{\nabla}_{\beta}\overline{\nabla}_{\mu}h_{\nu\sigma}\right) \quad (1.54)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\overline{\nabla}_{\alpha}h_{\rho\sigma} - \overline{\nabla}_{\rho}h_{\alpha\sigma}\right)\left(\overline{\nabla}_{\nu}h_{\mu\beta} + \overline{\nabla}_{\mu}h_{\nu\beta} - \overline{\nabla}_{\beta}h_{\mu\nu}\right)\Big],$$

где $\overline{\nabla}_{\mu}$ – ковариантная производная, определённая относительно фоновой метрики. Как обсуждалось ранее, фон должен быть гладким и соответствовать «низкочастотным» (медленно изменяющимся) членам в уравнениях, поэтому $\bar{R}_{\mu\nu}$ содержит только низкочастотные компоненты. Аналогично, $R_{\mu\nu}^{(1)}$ включает только высокочастотные (осциллирующие) компоненты. Интересно, что $R_{\mu\nu}^{(2)}$ должен содержать как низкочастотные, так и высокочастотные компоненты, так как гравитационные волны с разными волновыми векторами могут интерферировать друг с другом, создавая гладкое возмущение. Разделяя низкочастотные и высокочастотные компоненты $R_{\mu\nu}^{(2)}$, получается:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\left[R_{\mu\nu}^{(2)}\right]^{\text{Low}} + 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\text{Low}}, \quad (1.55)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\left[R_{\mu\nu}^{(2)}\right]^{\text{High}} + 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\text{High}}. \quad (1.56)$$

Заметим, что пространственный масштаб $\bar{l}$, значительно больше, чем длина волны гравитационных волн λ_{GW}, но меньше, чем масштаб фона L_{BG}. Если выполнить пространственное усреднение по масштабу $\bar{l}$, моды, соответствующие λ_{GW}, будут усреднены, и останутся только низкочастотные моды. Таким образом, уравнение (1.55) можно записать как:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\right\rangle + 8\pi G\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right\rangle, \quad (1.57)$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает пространственное усреднение по нескольким длинам волн λ_{GW} . Далее можно определить «усреднённую» низкочастотную часть $T_{\mu\nu}$, которая представляет собой эффективный тензор энергии-импульса материи.

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right\rangle = \bar{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}, \quad (1.58)$$

следовательно

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G}\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)}\right\rangle, \quad (1.59)$$

тогда уравнение 1.57 можно записать как:

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = 8\pi G\left(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right), \tag{1.60}$$

так же, как фоновое пространство-время искривляется материей $T_{\mu\nu}$, в уравнение входит еще один член (уравнение 1.59), который обусловлен гравитационными волнами (GW)! Уравнение 1.59, таким образом, становится определением тензора энергии-импульса гравитационных волн. С определением $\bar{R}_{\mu\nu}$ можно показать, что закон сохранения $\bar{\nabla}^{\mu}\left(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right) = 0$ упрощается до $\partial^{\mu}t_{\mu\nu} = 0$ на плоском фоне далеко от источника GW. Подставляя уравнение 1.54 в уравнение 1.59, $t_{\mu\nu}$ упрощается следующим образом:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\left\langle \partial_{\mu}h_{\alpha\beta}\,\partial_{\nu}h^{\alpha\beta}\right\rangle, \tag{1.61}$$

отсюда следует:

$$t^{00} = \frac{1}{32\pi G}\left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle = \frac{1}{16\pi G}\left\langle \dot{h}_{+}^{2} + \dot{h}_{\times}^{2}\right\rangle \tag{1.62}$$

В калибровке TTG поток энергии через элемент площади dA гравитационных волн принимает следующую форму:

$$\frac{dE}{dAdt} = t^{00} = \frac{1}{32\pi G}\left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle, \tag{1.63}$$

И он также может быть выражен через телесный угол $d\Omega = dA/r^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r^2}{32\pi G}\int d\Omega\left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle. \tag{1.64}$$

Аналогично, мы можем записать импульс, который переносят гравитационные волны

$$\frac{dP^{k}}{dAdt} = t^{0k} = \left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\,\partial^{k}h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle, \tag{1.65}$$

$$\frac{dP^{k}}{dt} = -\frac{1}{32\pi G}r^{2}\int d\Omega\left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\,\partial^{k}h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle. \tag{1.66}$$

Гравитационные волны (GW) переносят энергию, что означает, что источник GW будет терять энергию, что, в свою очередь, влияет на динамическую эволюцию источника. Например, в бинарной системе эта потеря энергии приводит к постепенному уменьшению орбитального радиуса, что потенциально может привести к слиянию системы, как это наблюдалось в детекциях LIGO. Фактически, даже до первой прямой регистрации GW с помощью LIGO в 2015 году, перенос энергии GW был косвенно подтвержден Халсом и Тейлором еще в 1974 году: они обнаружили, что распад орбиты в

бинарной системе пульсаров соответствует предсказаниям общей теории относительности (ОТО).

Примечательно, что техника усреднения, используемая здесь, по сути является преобразованием группы ренормализации, важным в квантовой теории поля (QFT). Мы "интегрировали" мелкие флуктуации, происходящие на малых масштабах длины (λ_{GW}), чтобы получить эффективную теорию на масштабе длины, который нас интересует ($\bar{l}$). Разница между ренормализацией здесь и в QFT заключается в том, что здесь мы интегрировали по координатному пространству, чтобы получить теорию, полезную на типичном масштабе длины, тогда как в QFT мы можем рассматривать импульсное пространство и "отрезать" высокие импульсы (высокие энергии), чтобы получить эффективную теорию для низких энергий.

1.1.5 Гравитационные волны от двойных систем

Теперь обратим внимание на фундаментальную физическую модель: две точечные массы, обращающиеся друг вокруг друга. Это одна из самых простых моделей, у которой происходит изменение квадрупольного момента массы, что приводит к излучению гравитационных волн. Поскольку бинарные системы широко распространены во Вселенной [9, 10], изучение этой базовой модели позволяет получить представление об астрофизических источниках, обсуждаемых в следующих разделах. Мы вычислим ведущий член формы волны GW для этой системы и исследуем, как такие системы эволюционируют.

Рассмотрим геометрию на Рисунок 1.2 и предположим, что два объекта m_1 и m_2, а также их круговая орбита, находятся в плоскости (x, y) системы координат источника. Начало координат этой системы устанавливаем в центре масс системы и предполагаем, что расстояние между m_1 и m_2 равно a. Когда они вращаются друг вокруг друга с угловой скоростью ω_s , плотность массы системы задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{00}(t,x) = \rho(t,x) = {} & m_1\left[\delta\left(x - r_1 \cos\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\delta\left(y - r_1 \sin\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\delta(z)\right] \\ & + m_2\left[\delta\left(x + r_2 \cos\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\delta\left(y + r_2 \sin\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\delta(z)\right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

где

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}a, r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}a. \quad (1.68)$$

Фаза $\pi/2$ выбрана для упрощения конечного результата (это устраняет неудобный знак минус). Подставляя плотность массы в уравнение 1.40, ненулевые компоненты квадрупольного момента массы выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \mu a^2 \frac{1-cos\,2\omega_s t}{2} \\ Q_{22} &= \mu a^2 \frac{1+cos\,2\omega_s t}{2} \\ Q_{12} &= -\frac{1}{2}\mu a^2 sin\,2\omega_s\, t, \end{aligned} \quad (1.69)$$

где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ – приведённая масса. Производные вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{11} &= -\ddot{Q}_{22} = 2\mu a^2 \omega_s^2 cos\, 2\omega_s t, \\ \ddot{Q}_{12} &= 2\mu a^2 \omega_s^2 sin\, 2\omega_s t. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Комбинируя квадруполь массы с уравнениями 1.48 и 1.49, мы получаем форму волны гравитационных волн:

$$\begin{aligned} h_+(t;\theta,\phi) &= \frac{4G\mu\omega_s^2 a^2}{r}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right) cos(2\omega_s t_{\mathrm{ret}} + 2\phi) \\ h_\times(t;\theta,\phi) &= \frac{4G\mu\omega_s^2 a^2}{r} cos\,\theta sin(2\omega_s t_{\mathrm{ret}} + 2\phi). \end{aligned} \tag{1.71}$$

Частота квадрупольного гравитационного излучения вдвое больше орбитальной частоты источника. ϕ вносит только фазовый сдвиг в форму волны; она вырождается с временным сдвигом бинарной системы, то есть можно сдвинуть систему на Δt и заменить ϕ другим углом, не изменяя физику. Таким образом, мы можем использовать время наблюдателя t, чтобы заменить запаздывающее время системы источника:

$$2\omega_s t_{\mathrm{ret}} + 2\phi \rightarrow 2\pi f t + \phi_0 \tag{1.72}$$

Интересно отметить, что амплитуда гравитационных волн зависит от θ, который в данном контексте представляет угол наклона ι источника. ι описывает угол между осью вращения системы и линией зрения наблюдателя. Мы всегда наблюдаем +-поляризацию, но когда источник находится "на ребре" относительно нас ($\iota = \pi/2$), × поляризация исчезает. Если мы находимся прямо над плоскостью орбиты, у источников ($\iota = 0$) амплитуда максимальна.

Амплитуда также зависит от массы системы. Однако она не является напрямую пропорциональной μ, как показано в уравнении 1.71, поскольку масса и орбитальные параметры (ω_s, a) не являются независимыми. Они связаны законами физики для круговой орбиты в рамках ньютоновского приближения (в первом порядке):

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{(a/2)^3}, \tag{1.73}$$

Где $m = m_1 + m_2$ – это полная масса системы. Мы хотим убрать из амплитуды лишний параметр – лучше выбрать a, поскольку a физически менее интересен, чем остальные два. Подставляя $a = \sqrt[3]{\omega_s^2/Gm}$ в уравнение 1.71 и используя уравнение 1.72, мы получаем:

$$h_+(t) = \mathcal{A}\left(\frac{1+\cos^2\iota}{2}\right)cos(2\pi ft + 2\phi_0)$$
$$h_\times(t) = \mathcal{A}cos\,\iota sin(2\pi ft + 2\phi_0). \quad (1.74)$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{4}{r}(G\mathcal{M})^{5/3}(\pi f)^{2/3}, \quad (1.75)$$

и

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5}m^{2/5} = \frac{(m_1m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} \quad (1.76)$$

Это масса "чирпа" системы. Именно масса "чирпа" напрямую определяет амплитуду гравитационных волн бинарных систем (в первом порядке). Мощность гравитационного излучения можно вычислить, интегрируя по телесному углу из уравнения 1.64, и она также определяется массой "чирпа":

$$P = \frac{r^2}{16\pi G}\int d\Omega\left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\right\rangle = \frac{32}{5G}(\pi G\mathcal{M}f)^{10/3}. \quad (1.77)$$

Мощность гравитационного излучения порождает новую проблему: бинарная система не может поддерживать стабильную круговую орбиту из-за потери энергии гравитационными волнами (GW). Необходимо учитывать обратное влияние GW на систему. В ньютоновском приближении энергия системы равна:

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{a} = -\left(\frac{\pi^2G^2\mathcal{M}^5f^2}{8}\right)^{1/3}, \quad (1.78)$$

где f – это частота гравитационных волн (GW). Потеря энергии, таким образом, приведёт к уменьшению размера орбиты a и увеличению частоты GW f (а также орбитальной частоты ω_s). Следовательно, на достаточно длительных временны́х масштабах потеря энергии приведёт к слиянию бинарной системы.

Для более ясного понимания предположим, что изменения орбиты происходят значительно медленнее, чем характерная скорость системы, то есть $|\dot{a}| \ll \omega_s a$. Это позволяет рассматривать орбиту как круговую, но с медленно изменяющимся радиусом. Мы остаёмся в режиме "квази-круговой" орбиты, пока это приближение выполняется.

Предполагая, что потеря энергии полностью обусловлена гравитационными волнами (GW), мы можем приравнять временную производную от энергии системы (уравнение 1.78) к мощности излучения гравитационных волн (уравнение 1.77). Это приводит к дифференциальному уравнению для частоты GW f:

$$\dot{f} = \frac{96}{5}\pi^{8/3}(G\mathcal{M})^{5/3}f^{11/3}, \quad (1.79)$$

решение этого уравнения имеет вид:

$$f(\tau) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{5}{\tau}\right)^{3/8}(G\mathcal{M})^{-5/8}, \tag{1.80}$$

где $\tau = t_c - t$– это время до коалесценции, а t_c – время слияния. Полезно записать это и его обратное в системе СИ:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{5}{\tau}\right)^{3/8}\left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3}\right)^{-5/8} \\ &\approx 134\text{Hz}\left(\frac{1.21M_\odot}{\mathcal{M}}\right)^{5/8}\left(\frac{1s}{\tau}\right)^{3/8}, \end{aligned} \tag{1.81}$$

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \frac{5}{256}\left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3}\right)^{-5/3}(\pi f)^{-8/3} \\ &\approx 2.18\text{s}\left(\frac{1.21M_\odot}{\mathcal{M}}\right)^{5/3}\left(\frac{100\text{Hz}}{f_{\text{gw}}}\right)^{8/3}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Уравнение 1.80 показывает, что, хотя частота гравитационных волн (GW) изменяется, существует явное однозначное соответствие между частотой и временем до слияния. Таким образом, в формуле формы волны мы можем заменить f на $f(\tau)$ и заменить $2\pi ft$ на кумулятивную фазу:

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} 2\pi f(t')dt'. \tag{1.83}$$

Наконец, форма волны записывается как:

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \mathcal{A}(\tau)\left(\frac{1+\cos^2\iota}{2}\right)cos[\Phi(\tau) + \phi_c] \\ h_\times(t) &= \mathcal{A}(\tau)cos\,\iota sin[\Phi(\tau) + \phi_c] \end{aligned} \tag{1.84}$$

где

$$\mathcal{A}(\tau) = \frac{1}{r}(G\mathcal{M})^{5/4}\left(\frac{5}{\tau}\right)^{1/4}, \tag{1.85}$$

$$\Phi(\tau) = -2\left(\frac{\tau}{5G\mathcal{M}}\right)^{5/8}. \tag{1.86}$$

Здесь Φ_c– интеграционная постоянная, обозначающая фазу коалесценции. Мы теперь количественно описали эволюцию частоты и амплитуды гравитационных волн. Поскольку обе величины увеличиваются, причём с ускорением, получаемый сигнал напоминает "чирп" (увеличивающийся тон), поэтому основной параметр $\mathcal{M}$ называют массой "чирпа". Важно отметить, что эта характеристика применима исключительно для квази-круговых орбит, где орбита остаётся круговой, и изменяется только радиус. Напротив, для эксцентрических орбит спектр частот GW не является квази-монохроматическим и распространяется на более высокие частоты [6], что может сделать сигнал менее "чирповым", даже если общая частота увеличивается. Эксцентрические

бинарные системы теряют энергию быстрее, чем квази-круговые, поэтому их эволюция орбиты происходит быстрее, чем это описано в уравнении 1.82. Кроме того, их эксцентриситет уменьшается в этом процессе, что приводит к круговой форме орбиты со временем. Более подробное описание эксцентрических бинарных систем можно найти в ссылках [5, 6].

Форма волны гравитационных волн (GW) в частотной области может быть получена с помощью преобразования Фурье и аппроксимации стационарной фазы (SPA). SPA основана на лемме Римана-Лебега: для интегрируемой функции $f(t)$ на интервале $[a, b]$справедливо:

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0. \tag{1.87}$$

Интуитивное объяснение леммы заключается в том, что $e^{i\lambda t}$ вносит быстро осциллирующий член, и интеграл усредняется до нуля из-за этих осцилляций. Наоборот, если $e^{i\lambda t}$ не осциллирует в некоторых местах, эти места внесут основной вклад в интеграл. Например, если показатель степени λt, или более общий вид $\Phi(t)$, имеет стационарную точку, где $\dot{\Phi} = 0$, то основной вклад в интеграл будет приходиться именно на эту стационарную точку.

Именно так обстоит дело при вычислении преобразования Фурье временной формы волны, заданной уравнением 1.84. Рассмотрим, например, +-поляризацию:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_+(f) &= \int dt \mathcal{A}(t_{\mathrm{ret}}) co\, s\, \Phi(t_{\mathrm{ret}}) e^{i2\pi f t} \\ &= \frac{1}{2} e^{i2\pi f r} \int dt_{\mathrm{ret}} \mathcal{A}(t_{\mathrm{ret}}) \left(e^{i\Phi(t_{\mathrm{ret}})} + e^{-i\Phi(t_{\mathrm{ret}})} \right) e^{i2\pi f t_{\mathrm{ret}}}, \end{aligned} \tag{1.88}$$

где мы использовали $\tau = t_c - t$ и $t_{\mathrm{ret}} = t - r$. Так как $\dot{\Phi(t)} > 0$, то $e^{i\Phi(t_{\mathrm{ret}})}$ будет всегда быстро осциллировать и зануляется после интегрирования. $e^{-i\Phi(t_{\mathrm{ret}})}$ вместе с $e^{i2\pi f t_{\mathrm{ret}}}$ внесут вклад из стационарной точки t_*, удовлетворяющей условию:

$$\dot{\Phi}(t_*) = 2\pi f, \tag{1.89}$$

таким образом, мы можем разложить экспоненциальный член до второго порядка вокруг t_* и аппроксимировать интеграл с использованием разложенной фазы. С физической точки зрения, вычисление $\tilde{h}_+(f)$, учитывая только вклады вокруг t_*, означает, что мы включаем только частоты, близкие к $f(t_*)$, что соответствует нашему приближению квази-круговой орбиты. Разложенный экспоненциальный член выглядит следующим образом:

$$-2\Phi(t) + 2\pi f t = -2\Phi(t_*) + 2\pi f t_* - 2\pi \dot{f}(t_*)(t - t_*)^2 + \cdots, \tag{1.90}$$

и преобразование Фурье становится аналитически интегрируемым, что даёт результат:

$$\tilde{h}_+(f) = \frac{1}{2} e^{i\Psi_+} A(t_*) \left(\frac{2\pi}{\ddot{\Phi}(t_*)}\right)^{1/2}, \tag{1.91}$$

где

$$\Psi_+ = 2\pi f(t_* + r) - \Phi(t_*) - (\pi/4). \tag{1.92}$$

t∗ можно выразить через f с помощью уравнения 1.80, и итоговые результаты имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_+(f) &= \mathcal{A}(f) \left(\frac{1+\cos^2 \iota}{2}\right) e^{i\Psi_+(f)} \\ \tilde{h}_\times(f) &= \mathcal{A}(f) cos\, \iota e^{i\Psi_\times(f)} \end{aligned}, \tag{1.93}$$

где

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{\pi^{2/3}} \left(\frac{5}{24}\right)^{1/2} \frac{1}{r} (G\mathcal{M})^{5/6} \frac{1}{f^{7/6}}, \tag{1.94}$$

$$\begin{gathered} \Psi_+(f) = 2\pi f(t_c + r) - \Phi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}(8\pi G\mathcal{M} f)^{-5/3}, \\ \Psi_\times(f) = \Psi_+(f) + \pi/2. \end{gathered} \tag{1.95}$$

Выражая амплитуду в удобных единицах, мы получаем оценку величины гравитационных волн (GW) для бинарных систем:

$$h \sim 1.4 \times 10^{-22} \left(\frac{f}{100\text{Hz}}\right)^{2/3} \left(\frac{\mathcal{M}}{1.22 M_\odot}\right)^{5/3} \left(\frac{10\text{Mpc}}{r}\right). \tag{1.96}$$

Обратите внимание, что $A(\tau)$ расходится при $t \to t_c$. Это происходит потому, что, когда t приближается к t_c, источник уже теряет свои упрощённые свойства, такие как значительное расстояние между компонентами, низкие скорости и слабое поле, которые позволяли проводить вычисления в ньютоновском приближении. Следовательно, все вышеприведённые уравнения больше не действительны. Фактически, учитывая метрику Шварцшильда вокруг компонентов бинарной системы, стабильные круговые орбиты невозможны, когда они достигают внутренней границы стабильной круговой орбиты (ISCO), радиус которой определяется общей массой m системы [6]:

$$r_{\text{ISCO}} = 6Gm, \tag{1.97}$$

и это соответствует частоте гравитационных волн для квази-круговых орбит.

$$\begin{aligned} f_{\text{ISCO}}^{\text{GW}} &= \frac{1}{6\pi\sqrt{6}} \frac{1}{Gm} \\ &\approx 440Hz \left(\frac{10M_\odot}{m}\right) (inSI). \end{aligned} \tag{1.98}$$

После достижения ISCO динамика бинарной системы будет определяться эффектами сильного поля, что в итоге приведёт к слиянию двух компонентов. Этот процесс будет подробно рассмотрен в следующих разделах. Примеры форм волн до достижения ISCO приведены на рисунке 1.3. Из этих форм волн можно увидеть характеристики "чирпа" и понять, как углы наклона влияют на амплитуды двух поляризаций.

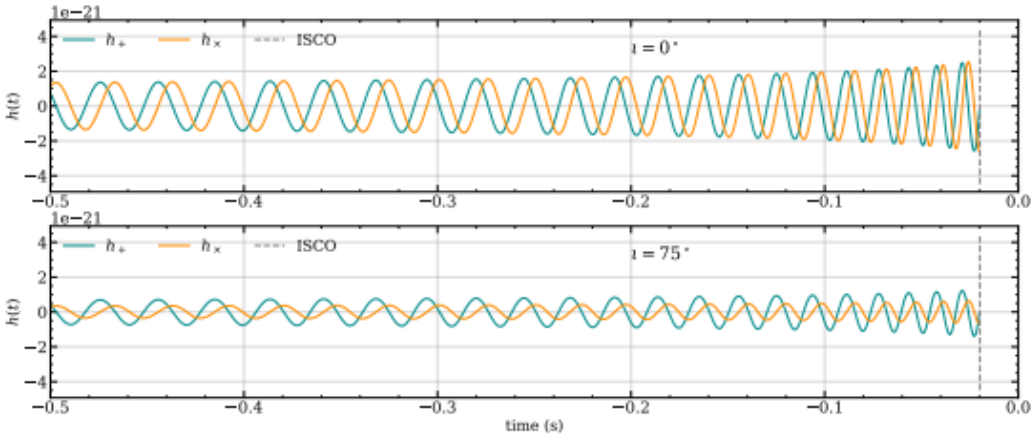


Рисунок 1.3 - Примеры форм гравитационных волн (GW) во временной области от бинарной системы с массами $20M_\odot + 20M_\odot$ на расстоянии 100 Мпк при различных углах наклона (0° и 75°)

В конце этого раздела важно отметить, что мы рассматривали физику гравитационных волн (GW) только в рамках общей теории относительности (ОТО). Несмотря на выдающийся успех и обширную экспериментальную проверку ОТО [11], эта теория сталкивается с трудностями как на теоретической, так и на наблюдательной стороне, такими как квантование, тёмная материя и тёмная энергия. Существуют различные мотивации для изучения альтернативных теорий гравитации (например, [12, 13, 14, 15, 16]), в которых гравитационные волны могут вести себя иначе, чем в ОТО, с точки зрения их генерации (свойства источника по-другому связаны с излучаемыми GW), распространения (дисперсия [17], двулучепреломление [18] и затухание амплитуды [19, 20]) и поляризации (добавляются до четырёх дополнительных поляризаций GW [21, 22, 23, 24]).Хотя предоставление исчерпывающего обзора этих теорий выходит за рамки данной работы, важно сохранять открытость к возможности того, что GW могут вести себя иначе в альтернативных теориях гравитации. Более того, наблюдение GW может быть уникальным тестом теорий гравитации [25].

1.2 Астрофизические источники гравитационных волн

Гравитационные волны (GW) являются чрезвычайно слабыми явлениями. Величину GW источников можно приблизительно оценить, заменив $\ddot{Q}_{ij}^{\mathrm{TT}}$ в уравнении 1.46 на Mv^2, где M – масса, а v – характерная скорость системы. Для искусственного источника с двумя массами $M = 10^3$, вращающимися друг вокруг друга со скоростью $v = 100$ м/с, h будет порядка 10^{-37}на расстоянии

r=1м. Это значение слишком мало для обнаружения, не говоря уже о технической сложности создания такой системы.

Поэтому надежда на детекцию GW связана с крайне энергичными источниками в далёкой Вселенной, где массы могут составлять от нескольких до миллиардов солнечных масс, а скорости приближаться к скорости света. На рисунке 1.3 показано, что система бинарных чёрных дыр (BBH) может генерировать $h \sim 10^{-21}$, что намного сильнее, чем у искусственных источников, подтверждая, что астрофизические источники являются гораздо более перспективными.

В этом разделе представлен обзор астрофизических источников гравитационных волн.

1.2.1 Компактные двойные системы

Двойные системы широко распространены во Вселенной; на самом деле, двойные звёзды встречаются чаще, чем одиночные [9, 10]. На финальных стадиях звёздной эволюции массивные звёзды могут коллапсировать в компактные объекты, такие как чёрные дыры (BH), нейтронные звёзды (NS) и белые карлики (WD), в зависимости от их массы. Двойная звезда может пройти процесс совместной эволюции и сформировать компактную двойную систему [9, 26, 27, 28]. Распространённые компактные двойные системы звёздной массы включают:

- двойные чёрные дыры (BBH),
- двойные нейтронные звёзды (BNS),
- системы нейтронная звезда – чёрная дыра (NSBH),
- двойные белые карлики (DWD).

Помимо этого, компактные двойные системы звёздной массы могут формироваться за счёт динамического захвата одиночных объектов в плотных звёздных скоплениях или в дисках активных галактических ядер (AGN) [29, 30, 31]. В редких случаях возможны параболические и гиперболические столкновения двух компактных объектов, которые способны порождать гравитационные волны (GW), аналогичные процессам тормозного излучения (Bremsstrahlung) в электромагнитной радиации [32, 33]. Эти компактные двойные системы являются естественными массивными центрифугами, генерирующими "сильные" сигналы GW, и представляют собой идеальные источники для детектирования гравитационных волн.

Помимо чёрных дыр (BH) и нейтронных звёзд (NS) звёздного происхождения, теории предсказывают существование альтернатив, которые ещё предстоит достоверно наблюдать. Например, первичные чёрные дыры (Primordial BH) являются одной из таких альтернатив, которые могли образоваться в ранней Вселенной [34, 35], а их скорость слияния предсказана в работе [36]. Экзотические объекты, такие как бозонные звёзды [37], также рассматриваются как альтернативы BH и NS, согласно теориям, могут формироваться во Вселенной [38, 39].

Помимо компактных двойных систем звёздной массы, упомянутых выше, ожидается, что массивные чёрные дыры в центрах галактик также могут быть

источниками гравитационных волн (GW) при взаимодействии с другими массивными объектами. Это включает:

- **Сверхмассивные двойные чёрные дыры (SMBBH)** [40, 41]: если второй объект также является сверхмассивной чёрной дырой, что указывает на слияние двух галактик.
- **Взаимодействия с экстремальным отношением масс (EMRI)** [42, 43]: если второй объект – это захваченный чёрной дырой объект звёздной массы.

Оба этих сценария являются значимыми источниками GW и предоставляют ценные возможности для изучения динамики массивных объектов и структуры Вселенной.

Гравитационное излучение и эволюция двойных систем с квази-круговыми орбитами были рассмотрены в разделе 1.1.5. Двойные системы теряют энергию в виде гравитационных волн (GW) во время движения по орбитам, что приводит к уменьшению радиуса орбиты и увеличению её частоты, тем самым создавая сигналы GW с "чирпообразной" структурой. Этот этап известен как стадия инспираляции, в течение которой компоненты двойной системы значительно разделены и движутся с низкими скоростями в слабом гравитационном поле. Эти свойства перестают выполняться, когда компоненты сближаются настолько, что метрика Шварцшильда больше не допускает стабильных круговых орбит. После достижения ISCO (внутренней границы стабильной орбиты) динамика системы начинает определяться эффектами сильного гравитационного поля, и компоненты начинают стремительное сближение. Этот этап называется стадией слияния, во время которой амплитуда GW достигает максимума. Слияние может привести к образованию более крупной чёрной дыры [7] в возбужденном (нарушенном) состоянии, которая генерирует затухающий сигнал GW вследствие квазинормальных мод (QNMs) её колебаний [44]. Этот заключительный этап называется затуханием. Весь процесс инспираляции, слияния и затухания часто обозначается как Compact Binary Coalescence (CBC).

Однако в зависимости от типа, массы, начальных условий и расстояния компактных двойных систем они будут генерировать разные виды сигналов GW, и не все компактные объекты проходят описанный выше процесс инспираляции, слияния и затухания. Первая особенность, которую можно отметить из уравнения 1.98, заключается в том, что частота GW обратно пропорциональна массе источника. Для компактных двойных систем звёздной массы частотный диапазон находится в пределах $\mathcal{O}(1) \sim \mathcal{O}(10^3)$Гц около стадии слияния, тогда как для сверхмассивных двойных чёрных дыр (SMBBH) и систем с экстремальным соотношением масс (EMRI) частотный диапазон составляет $\mathcal{O}(10^{-4}) \sim \mathcal{O}(10^{-1})$Гц. Это означает, что для наблюдения коалесценции систем звёздной массы и сверхмассивных систем могут понадобиться разные типы детекторов.

Во-вторых, формулу времени до слияния (уравнение 1.82) можно преобразовать для оценки времени от формирования системы до её слияния τ_0:

$$\tau_0 \simeq 9.8 \times 10^6 \text{yr} \left(\frac{T_0}{1\text{hr}}\right)^{8/3} \left(\frac{M_\odot}{m}\right)^{2/3} \left(\frac{M_\odot}{\mu}\right), \quad (1.99)$$

где T_0 – начальный орбитальный период. Учитывая, что возраст галактик оценивается примерно в 10 миллиардов лет [45], двойные системы звёздной массы, начавшие с достаточно близкими орбитами, смогут слиться в масштабе времени, который мы можем наблюдать. Эти системы оставят кратковременные сигналы в детекторах, чувствительных к высоким частотам (которые могут регистрировать только поздние стадии слияния с высокой амплитудой GW), долговременные сигналы в детекторах, чувствительных к низким частотам, которые смогут зафиксировать ранние стадии эволюции, если сигнал достаточно силён. Однако существует также определённая доля компактных двойных систем, которые не могут эволюционировать до стадии слияния в пределах текущего возраста галактик, или их слияния могут остаться ненаблюдаемыми из-за слишком большого расстояния до нас. Поскольку таких систем множество, они будут вносить вклад в стохастический гравитационно-волновой фон (SGWB), который можно оценить только статистически на уровне популяции [46, 47]. Помимо сигналов гравитационных волн (GW), ожидается, что некоторые компактные двойные системы будут иметь электромагнитные (EM) контрпартнеры, а также другие контрпартнеры, такие как нейтрино. Например, сильные EM-сигналы могут генерироваться как на стадиях орбитального движения, так и во время слияния. Слияние двойных нейтронных звёзд (BNS), например, может наблюдаться как килонова, которая излучает в широком диапазоне, от гамма-всплесков до радиоволн [48, 49]. "Влажная" среда вокруг двойной системы, особенно в аккреционном диске рядом с сверхмассивной чёрной дырой, также может приводить к появлению EM-контрпартнеров [50, 51]. Детектирование этих EM-контрпартнеров имеет огромное значение, так как оно расширяет гравитационно-волновую астрономию до мультимессенджерной астрономии, позволяя собирать богатую физическую информацию из разных видов наблюдений.

В рамках данной диссертации я сосредоточусь на изучении компактных двойных систем, однако в следующих разделах также представлю краткий обзор других астрофизических источников.

1.2.2 Пульсары

Вращающиеся системы не ограничиваются двойными. Пульсары – это плотные, сильно намагниченные и быстро вращающиеся нейтронные звёзды, которые излучают электромагнитное излучение через свои магнитные полюса. Пульсары не являются идеальными сферами; из-за их нерегулярной формы и вращения у них существует ненулевой изменяющийся квадрупольный момент массы, что приводит к излучению гравитационных волн [52].

Существуют различные типы неровностей пульсаров, которые порождают различные сигналы гравитационных волн. Первый тип – это трёхосная неровность: нейтронная звезда может иметь «выпуклости» или «горы», возникающие из-за особенностей её формирования, магнитного поля, напряжений, вызванных релаксацией, и по многим другим причинам [53, 54, 55].

Эта постоянная неровность в сочетании с вращением звезды порождает длительные непрерывные гравитационные волны. В отличие от чирп-сигналов CBC, непрерывные волны от изолированных пульсаров затухают со временем, поскольку вращение пульсаров постепенно замедляется из-за потери энергии через гравитационное излучение. Эволюция частоты в этом случае происходит значительно медленнее, чем у компактных двойных систем. Типичная величина непрерывных гравитационных волн от изолированных вращающихся пульсаров составляет [6]:

$$h \sim 1.06 \times 10^{-25} \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}}\right) \left(\frac{I_{zz}}{10^{38}\mathrm{kgm}^2}\right) \left(\frac{10\mathrm{kpc}}{r}\right) \left(\frac{f}{1\mathrm{kHz}}\right)^2, \qquad (1.100)$$

где ϵ – экваториальная эллиптичность пульсара, а I_{zz} – главный момент инерции. Непрерывные гравитационные волны слабее, чем GW от компактных двойных систем (уравнение 1.96). Однако сигнал накапливается с увеличением времени наблюдения быстрее, чем шум, что делает возможным детектирование непрерывных волн в определённый момент. Более того, даже отсутствие обнаружения является ценным, поскольку оно накладывает ограничения на характеристики нейтронных звёзд, наблюдаемых в электромагнитном диапазоне [56]. В некоторых случаях вращение пульсара вызывает прецессию, что может приводить к генерации GW с длительным или среднесрочным временем излучения [6, 57].

Второй тип неровностей – это колебания пульсаров. Пульсары могут испытывать различные вибрационные режимы, включая:

- **f-режимы (фундаментальные режимы)**: первый резонансный масс-квадрупольный режим, который может возбуждаться скачками вращения (глитчами), ядерными взрывами или другими причинами.
- **R-режимы (волны Россби)**: масс-токовый квадруполь в горячих молодых или аккрецирующих нейтронных звёздах.
- **Другие колебательные режимы**, связанные с внутренними процессами звезды [52, 58].

Некоторые из этих колебаний являются короткоживущими, как, например, f-режимы, и генерируют кратковременные всплески GW. Другие, такие как R-режимы, более долговечны и порождают непрерывные гравитационные волны.

Все вышеприведённые рассуждения о пульсарах также применимы к другим релятивистским звёздам, таким как бозонные звёзды, если они действительно существуют. Наблюдение гравитационных волн является идеальным тестом для таких экзотических объектов, поскольку, согласно предсказаниям, они обладают иной экваториальной эллиптичностью ϵ по сравнению с нейтронными звёздами. Эта эллиптичность может быть оценена с помощью наблюдений GW.

1.2.3 Гравитационный коллапс

Нейтронные звёзды и чёрные дыры образуются в результате гравитационного коллапса массивных и старых звёзд или коллапса ядра аккрецирующих белых карликов. Если коллапс происходит не сферически и обусловлен сильным вращением, он может генерировать всплески

гравитационных волн , которые уносят связующую энергию и угловой момент [59, 60]. Несмотря на значительные усилия по моделированию процессов коллапса [59, 61, 62, 63], полное понимание таких событий остаётся сложной задачей из-за сложности гидродинамики, физики нейтрино, реалистичной ядерной физики, магнитных полей и других факторов. Поэтому невозможно получить замкнутое уравнение формы волны, как для сигналов CBC или квазимонохроматических сигналов в непрерывных волнах. Следовательно, для обнаружения всплесков GW, вызванных гравитационным коллапсом, требуются немоделированные поиски, которые используют только согласованность сигналов между различными детекторами.

Симуляции показывают, что 99% энергии в этом процессе уносится нейтрино, а большая часть оставшейся энергии преобразуется в кинетическую энергию взрыва. Электромагнитное излучение (этот процесс также сопровождается гамма-всплесками [64]) и гравитационные волны получают лишь около 0.01% [65]. Гравитационные волны, возникающие при коллапсе типичной сверхновой, могут извлекать примерно от 10^{-7}до 10^{-5}от общей доступной массы-энергии, а их частотный диапазон лежит в пределах 20–200 Гц [66, 67]. Типичная амплитуда всплеска GW приближённо задаётся выражением [60]:

$$h \sim 6 \times 10^{-21} \left(\frac{E}{10^{-7} M_{\odot}}\right)^{1/2} \left(\frac{1\text{ms}}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{1\text{kHz}}{f}\right) \left(\frac{10\text{kpc}}{r}\right), \quad (1.101)$$

где EEE – эквивалентная масса-энергия в единицах солнечной массы ($M_{\odot}$), а T – длительность всплеска. Эта амплитуда может быть значительной на расстоянии 10 кпк, однако частота таких событий в пределах 10 кпк вносит значительные неопределённости в возможность их раннего обнаружения.

1.2.4 Стохастический фон

В предыдущих разделах мы обсуждали дискретные источники. Помимо этого, во Вселенной существует стохастический фон гравитационных волн, который возникает из-за наложения сигналов от всех дискретных систем, излучающих GW, а также от некоторых космологических процессов. Этот фон аналогичен космическому микроволновому фону (CMB). Инспиральные двойные системы, упомянутые в разделе 1.2.1, являются примером астрофизического стохастического фона. Различные явления в ранней Вселенной, такие как инфляция [68], преднагрев [69], фазовые переходы [70] и космические струны [71], предполагается, также вносят вклад в первичный стохастический фон. Стохастический фон является важным инструментом для изучения как галактических двойных систем, так и процессов, происходивших в ранней Вселенной.

Стохастический фон необходимо описывать статистически. Он охватывает широкий частотный диапазон – от наносекунд до килогерц, поэтому принято говорить о плотности энергии на единицу логарифма частоты. После усреднения

по всем направлениям источников и независимым поляризациям плотность энергии определяется следующим образом [60]:

$$\frac{d\rho_{\mathrm{gw}}}{d\ln f} = 4\pi^2 f^3 S_{\mathrm{GW}}(f), \tag{1.102}$$

где $S_{\mathrm{GW}}(f)$ – спектр мощности стохастического фона. Его отношение к критической плотности ρ_{c} определяется как Ω_{GW}, аналогично тому, как Ω_m и Ω_Λ определяются в космологических моделях:

$$\Omega_{\mathrm{GW}}(f) = \frac{1}{\rho_{\mathrm{c}}}\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}\ln f} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} f^3 S_{\mathrm{GW}}(f), \tag{1.103}$$

где H_0 – постоянная Хаббла. Ожидается, что Ω_{GW} будет очень малой ($< 10^{-5}$), так как более высокие значения противоречат стандартной модели нуклеосинтеза Большого взрыва [60].

Стохастический фон невозможно отличить от шума в течение короткого периода наблюдения с использованием одного детектора. Однако в долгосрочной перспективе, если детектор изменяет свою ориентацию, теоретически становится возможным различить фон и шум [6].

Более перспективным методом обнаружения стохастического фона является использование кросс-корреляции между разными детекторами [72], так как у них различная чувствительность к фоновым гравитационным волнам. Этот подход позволяет выделять сигналы GW из случайных шумов, комбинируя данные нескольких детекторов.

1.3 Детекторы гравитационных волн

Первая попытка обнаружения гравитационных волн (GW) относится к 1960-м годам, когда Джозеф Вебер создал резонансный стержень в Университете Мэриленда [73]. Резонансный стержень возбуждается и начинает вибрировать в ответ на GW за счёт изменений тензора напряжений внутри стержня. Вебер заявил о первом обнаружении сигналов из центра Галактики в 1969 году [74].

Однако последующие попытки других исследовательских групп, достигших аналогичной или даже большей чувствительности, не смогли воспроизвести его результаты [75, 76, 77, 78, 79]. Поэтому открытие Вебера не было признано научным сообществом, и исследования резонансных стержней постепенно сошли на нет.

Косвенное обнаружение гравитационных волн (GW) было сделано Халсом и Тейлором в 1974 году [8]. Они наблюдали инспиральную систему двойных нейтронных звёзд (BNS) и зафиксировали уменьшение периода их орбиты. Изменения периода орбиты идеально соответствовали предсказаниям общей теории относительности (ОТО), подтверждая, что потеря энергии в системе согласуется с энергией, уносимой гравитационным излучением. За это выдающееся открытие двойного пульсара и косвенное доказательство существования гравитационных волн они были удостоены Нобелевской премии по физике в 1993 году.

Использование интерферометров в качестве детекторов гравитационных волн было впервые предложено в 1960-х годах [80]. После десятилетий совместных усилий международной команды и проведения нескольких наблюдательных кампаний [81, 82, 83], в 2015 году был достигнут важный этап: усовершенствованная лазерно-интерферометрическая обсерватория гравитационных волн (Advanced LIGO, aLIGO) с двумя интерферометрами длиной 4 км напрямую зарегистрировала GW, возникшие при слиянии системы двойных чёрных дыр [7]. Это историческое событие открыло новую эру гравитационно-волновой астрономии. За этот прорыв три лидера проекта LIGO – Райнер Вайс, Барри Бариш и Кип Торн – были удостоены Нобелевской премии по физике в 2017 году.

В то время как наземные детекторы продолжают фиксировать новые события коалесценции компактных двойных систем (CBC), сообщество **Pulsar Timing Array (PTA)** заявило в 2023 году об обнаружении стохастического фона в наногерцовом диапазоне [84, 85, 86, 87], что стало ещё одним прорывом в гравитационно-волновой астрономии.

В этом разделе я представлю обзор детекторов гравитационных волн (GW), сосредоточив основное внимание на наземных интерферометрах. Будут рассмотрены их чувствительность, источники шума, текущее состояние и перспективы развития. В конце раздела я также кратко опишу новые типы детекторов гравитационных волн.

1.3.1 Наземные интерферометры

Интерферометрические детекторы гравитационных волн (GW) основаны на принципе интерферометра Майкельсона, как показано на Рисунок 1.4. Лазерный луч разделяется на два плеча равной длины с помощью делителя луча и возвращается к фотодетектору. Как обсуждалось в разделе 1.1.2, проходящие GW изменяют собственное расстояние вдоль плеч интерферометра, что приводит к изменению оптического пути лазера. Эти изменения вызывают различия в интерференционных паттернах, которые фиксируются фотодетектором и затем интерпретируются как сигнал GW. Однако реальная конфигурация LIGO значительно сложнее базового интерферометра. Для повышения чувствительности детектора используются следующие ключевые компоненты:

- Сейсмическая изоляция: Подвесная система зеркала (тестовой массы) состоит из сложной четырёхуровневой маятниковой конструкции, которая позволяет пассивно и активно устранять сейсмические вибрации, обеспечивая статичность зеркала [88, 89, 90].
- Мощный и стабильный лазер: Лазерная система LIGO генерирует высокомощный инфракрасный лазер для повышения точности измерений. Для стабилизации флуктуаций мощности лазера используется ряд механизмов обратной связи до его применения в интерферометре [91].
- Ультравысокий вакуум: Оптические компоненты LIGO размещены в среде ультравысокого вакуума, приблизительно равного одной триллионной

части атмосферного давления [92], что минимизирует рассеяние лазера на молекулах воздуха.

- Ультраотражающие и стабильные зеркала: Зеркала обладают высокой отражательной способностью, что предотвращает поглощение фотонов и нагревание – они поглощают лишь один фотон из каждых 3,3 миллиона [93]. Зеркала покрыты десятками слоёв оптических покрытий для достижения гладкости на уровне нанометров [94]. Для точной компенсации изменений формы зеркал, вызванных нагреванием, используется вспомогательная система с лазером CO_2 [89].
- **Полости очистки мод (Modecleaner Cavities)**: Полости очистки мод добавлены после выхода лазера и перед фотодетектором для фильтрации входных и выходных полей [88]. Это помогает уменьшить шум лазера и улучшить качество луча.
- **Полости плеч (Arm Cavities)**: Каждое плечо включает в себя полость Фабри-Перо, которая позволяет лазерному лучу проходить туда и обратно тысячи раз [88]. Это увеличивает циркулирующую мощность и эффективно удлиняет длину плеча интерферометра.
- **Рекуперация мощности (Power Recycling)**: Система рекуперации мощности (добавление зеркала для формирования резонансной полости) размещена перед делителем луча, что увеличивает входную мощность лазера примерно в O(1000)O(1000)O(1000) раз [95, 96].
- **Рекуперация сигнала (Signal Recycling)**: Зеркало добавлено перед фотодетектором для рекуперации лазерного луча обратно в интерферометр [97, 98]. Это позволяет настроить полосу максимальной чувствительности и улучшить отношение сигнал/шум (SNR).
- **Сжатие света (Light Squeezer)**: Лазер вводится в сжатых состояниях для преодоления стандартного квантового предела [99, 100, 101], что позволяет повысить чувствительность в некоторых частотных диапазонах, особенно на частотах ниже 150 Гц.

Поскольку детекторы LIGO являются чрезвычайно сложными и находятся в процессе быстрого развития, данный обзор не может охватить все модули и используемые технологии. Более подробную информацию можно найти, например, в работах [88, 92, 98]. Кроме LIGO, следует также отметить вклад коллабораций Virgo [102] и KAGRA [103]. Они присоединились к поиску гравитационных волн (GW) с O2 в 2017 году и с O4 в 2023 году соответственно.

Предположим, что единичные векторы вдоль плеч детектора обозначены как u_i, v_i , а два плеча имеют одинаковую длину L_0. Когда через детектор проходит GW, и $h_{\mu\nu}$ задан в поперечно-трансверсальной (TTG) калибровке, форма волны выражается следующим образом:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}, \tag{1.104}$$

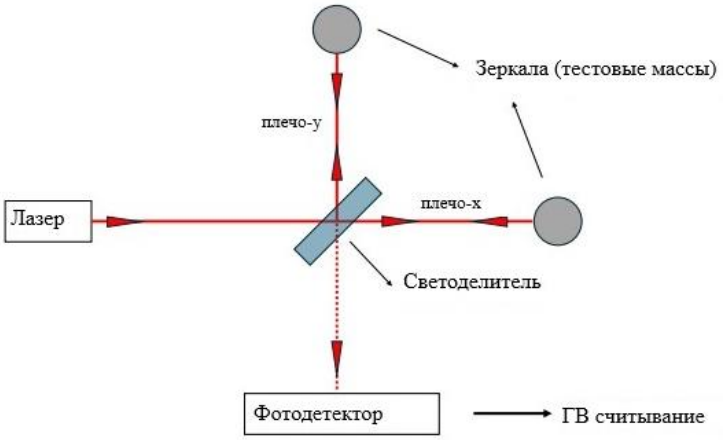


Рисунок 1.4: Структура базового интерферометра Майкельсона

Предположим, что $h_+, h_\times$ являются постоянными на масштабах длины L0L_0L0, то есть длина волны GW значительно превышает длину плеча детектора. Это хорошее приближение для наземных детекторов, подобных LIGO, длина плеч которых составляет порядка километра. Условие $\lambda_{\mathrm{GW}} \gg 4km$ означает $f_{\mathrm{GW}} \ll 75\mathrm{kHz}$, что является безопасным пределом, учитывая частотные диапазоны астрофизических источников, описанные в разделе 1.2.
Ранее мы вычисляли собственное расстояние только для +++-поляризации в уравнении 1.29, и аналогичные расчёты могут быть применены для определения собственного расстояния в данном случае. Рассмотрим собственное расстояние вдоль плеча $u_i = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{aligned} ds_u^2 &= L_0^2[(1+h_+)u_1^2 + (1-h_+)u_2^2 + u_3^2 + 2h_\times u_1 u_2] \\ &= L_0^2(1 + h_{11}u_1^2 + h_{22}u_2^2 + h_{12}h_{21}u_1u_2) \\ &= L_0^2\left(1 + u^i u^j h_{ij}\right), \end{aligned} \tag{1.106}$$

следовательно

$$s_u = L_0\left(1 + u^i u^j h_{ij}\right)^{1/2} \approx L_0(1 + \tfrac{1}{2}u^i u^j h_{ij}). \tag{1.107}$$

интерферометр измеряет разницу во времени прохождения света туда и обратно по двум плечам, поэтому измеряемой величиной является деформация h, определяемая как:

$$h = \frac{s_u - s_v}{L_0} = h_{ij}\frac{u^i u^j - v^i v^j}{2} = D^{ij}h_{ij}, \tag{1.108}$$

где

$$D^{ij} = \frac{u^i u^j - v^i v^j}{2} \tag{1.109}$$

эта величина называется **тензором детектора**. Иными словами, отклик интерферометра на гравитационные волны представляет собой проекцию

поляризаций GW на тензор детектора. Для дальнейшего упрощения этого уравнения запишем $h_{ij} = h_+(\widehat{C_+})_{ij} + h_\times(C_\times)_i$, где C_+ и $C_\times$ – тензоры поляризаций из уравнения 1.27. Тогда получаем:

$$h = D^{ij}(h_+(C_+)_{ij} + h_\times(C_\times)_{ij}) = F_+h_+ + F_\times h_\times, \quad (1.110)$$

где

$$F_+ = C_+^{ij}D_{ij}, F_\times = C_\times^{ij}D_{ij} \quad (1.111)$$

это функции отклика антенны интерферометра. Приведённое выше уравнение записано в системе координат детектора, где оси x и y совпадают с направлениями плеч детектора.

На практике поляризации формы сигнала вычисляются в системе координат источника, поэтому требуется серия преобразований координат. Существует два эквивалентных подхода для расчёта отклика:

1. Первый подход преобразует все тензоры в координатную систему детектора [106].
2. Второй подход преобразует все тензоры в фиксированную систему координат Земли [107].

Мы используем второй подход, поскольку он широко применяется в программных пакетах, связанных с гравитационными волнами (например, LALSuite [108], Bilby [109]) и удобен для выполнения параллельных вычислений (см., например, секцию 6.4.1).

Геометрия представлена на Рисунке 1.5. Система координат источника (x, y, z) (ось z) и волновая система координат (x', y', z') соответствуют тем же координатам, что и на Рисунке 1.2. Ось z' направлена в сторону Земли. Оси z и z' фиксированы естественным образом, в то время как свобода выбора плоскостей (x, y) и (x', y') обычно фиксируется для удобства в физических расчётах (например, при вычислении формы сигнала), причём в этом процессе задаётся начальная фаза ϕ_0.

Небесная система координат обозначается как (x'', y'', z''), где прямое восхождение α и склонение δ определяются в этой системе. Ось x'' указывает на точку весеннего равноденствия. Направление источника на небесной сфере в этой системе координат задаётся значениями (α, δ).

Ось x' волновой системы координат образует угол с направлением убывания прямого восхождения, который называется углом поляризации ψ. Этот угол определяет тензоры поляризации гравитационных волн в волновой системе координат. Если $\iota = 0$, то этот угол вырождается с ϕ_0 (или, эквивалентно, с фазой слияния ϕ_c).

Возвращаясь к Земле, существует фиксированная земная система координат (x''', y''', z'''), которая делит ось z'' с небесной системой координат. Именно в этой системе координат мы хотим вычислять функции отклика. Пусть ось x''' направлена на нулевой меридиан, а ось y''' указывает на 90° восточной

долготы. Для описания расположения вершины детектора используются долгота ϕ и широта λ.

Система координат детектора обозначается как (x'''', y'''', z''''). Для описания ориентации детектора используются азимутальные углы ψ_x и ψ (измеряемые от направления на север к востоку). Наклон плеч детектора от горизонтали характеризуется углами наклона ω_x и ω_y.

Угол наклона обычно очень мал ($\sim 10^{-5} - 10^{-4}$ радиан), однако на Рисунке 1.5 он увеличен для наглядности. Для упрощения изображения углы ψ_x и ω_y не были обозначены.

Сначала вычислим тензоры поляризации в фиксированной земной системе координат (x''', y''', z'''). Рассмотрим стандартные сферические координаты (θ, ϕ), определённые в (x''', y''', z'''). На основе Рисунка 1.5 получаем $\theta = \pi/2 - \delta, \phi = \alpha - GMST$, где GMST (Гринвичское среднее звёздное время) измеряется от оси x''' (нулевого меридиана) до точки весеннего равноденствия, согласно определению. Матрица, преобразующая координаты из (x', y', z') в (x''', y''', z'''), задаётся следующим образом [106]:

$$M = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\delta\sin\psi & -\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\delta\sin\psi & \cos\delta\sin\psi \\ -\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\sin\delta\cos\psi & \cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\delta\cos\psi & \cos\delta\cos\psi \\ -\cos\phi\cos\delta & -\sin\phi\cos\delta & -\sin\delta. \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

Базисные векторы в волновой системе координат $\hat{x}_i'$ и $\hat{y}_i'$преобразуются в фиксированную земную систему координат $\hat{X}_i''' = M_{ij}\hat{x}_j', \hat{Y}_i''' = M_{ij}\hat{y}_j'$. Учитывая, что в волновой системе координат $\hat{x}_i' = (1,0,0)_i$, преобразованный базисный вектор будет совпадать с первым столбцом матрицы M_{ij}. Аналогично, для $\hat{y}_i'$ преобразованный вектор будет соответствовать второму столбцу матрицы M_{ij}.

$$X_i''' = M_{i1}, Y_i''' = M_{i2}. \quad (1.113)$$

Тензор поляризации определяется следующим образом:

$$C_{ij}^{+''''} = X_i''' X_j''' - Y_i''' Y_j''', C_{ij}^{\times''''} = X_i''' Y_j''' + Y_i''' X_j'''. \quad (1.114)$$

Теперь вычислим тензор детектора. Декартовы координаты детектора в фиксированной земной системе координат задаются следующим образом [107]:

$$r_i''' = ([R(\varphi) + h]\cos\varphi\cos\lambda, \quad [R(\varphi) + h]\cos\varphi\sin\lambda, \quad [(b^2/a^2)R(\varphi) + h]\sin\varphi)_i, \quad (1.115)$$

Где $R(\varphi) = a^2(a^2\cos\varphi + b^2\sin\varphi)^{-1/2}$ – локальный радиус Земли, основанный на модели Земли WGS-84, с параметрами a=6378137a = 6378137a=6378137 м (экваториальный радиус), b=6356752.314b = 6356752.314b=6356752.314 м (полярный радиус). h – высота над уровнем моря, на которой расположен

детектор. В данной позиции единичные векторы, указывающие на Восток, Север и Вверх, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i &= (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0)_i \\ \hat{\varphi}_i &= (-\sin\varphi\cos\lambda, -\sin\varphi\sin\lambda, \cos\varphi)_i \\ \hat{h}_i &= (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi)_i,\end{aligned} \tag{1.116}$$

в фиксированной земной системе координат x-плечо детектора определяется следующим образом:

$$u_i''' = \cos\omega_x\cos\psi_x\hat{\lambda}_i + \cos\omega_x\sin\psi_x\hat{\varphi}_i + \sin\omega_x\hat{h}_i, \tag{1.117}$$

аналогично, v_i''' задаётся тем же уравнением, только с заменой индекса $x \to y$. Тогда тензор детектора D_{ij}''' можно вычислить следующим образом:

$$D_{ij}''' = \frac{u_i'''u_j''' - v_i'''v_j'''}{2}, \tag{1.118}$$

объединяя уравнение (1.114), функции отклика могут быть получены следующим образом:

$$F_{+,\times}(\alpha, \delta, \psi, \text{time}) = D_{ij}'''C_{+,\times}^{'''ij}(\alpha, \delta, \psi, \text{time}). \tag{1.119}$$

В дополнение к проекции амплитуды, необходимо учитывать временной сдвиг, если для описания события гравитационной волны используется универсальный временной параметр (а не локальное время для каждого детектора). Например, если используется время t_c, соответствующее моменту прихода гравитационной волны в центр Земли, временной сдвиг задаётся следующим выражением:

$$\Delta t = t_{\text{det}} - t_c = r_i'''(n''')^i/c, \tag{1.120}$$

где c – скорость света, а временной сдвиг определяется следующим образом:

$$n_i''' = (-\cos\phi\cos\delta, -\cos\delta\sin\phi, -\sin\delta)_i \tag{1.121}$$

это волновой вектор в фиксированной земной системе координат, описывающий направление распространения гравитационной волны, указывающий от источника к Земле. Учитывая радиус Земли в 6371 км, временной сдвиг Δt всегда будет меньше 22 мс. Таким образом, отклик детектора равен:

$$h_{det}(t) = h(t + \Delta t) = F_+(\alpha, \delta, \psi, t)h_+(t + \Delta t) + F_\times(\alpha, \delta, \psi, t)h_\times(t + \Delta t), \tag{1.122}$$

а преобразование Фурье задаётся следующим образом [111]:

$$\mathcal{F}[h(t + \Delta t)] = e^{-2\pi i f\Delta t}\mathcal{F}[h(t)]. \tag{1.123}$$

Если продолжительность сигнала короткая, функции отклика можно считать неизменными, так как Земля практически не поворачивается во время события гравитационной волны. Таким образом, t в функциях отклика можно заменить на время t_c , соответствующее геоцентру.
Временная задержка от геоцентра (или эквивалентно временная задержка между разными детекторами) имеет ключевое значение для определения положения источника гравитационных волн на небе, поскольку информация о триангуляции на небесной сфере закодирована во временной задержке [112].

Подробные параметры (местоположение, ориентация и т. д.) для детекторов LIGO, Virgo, KAGRA, а также многих других существующих или предложенных детекторов можно найти в файле LALDetectors.h в составе LALSuite [108].

1.3.2 Харакристика шумов

Источники шума

Эксперимент по обнаружению гравитационных волн является одним из самых точных в мире, и понимание и характеристика шумов имеют решающее значение для успешного обнаружения. Данные гравитационно-волнового эксперимента d состоят из сигнала h (рассчитанного в предыдущем разделе) и шума n, то есть:

$$d = h + n, \tag{1.124}$$

это уравнение справедливо как во временной, так и в частотной областях. Возможные источники шума включают [88]:

- Сейсмический шум**.** Наземные детекторы гравитационных волн чувствительны к различным видам сейсмических вибраций такие как приливы Земли (< 10 Гц), вызванные гравитационным воздействием Луны и Солнца. Микросейсмические пики (~160 мГц), возникающие из-за давления волн на дно океана. Вибрации от транспорта, такие как поезда и автомобили, находящиеся поблизости. Для управления сейсмическим шумом применяются системы изоляции и активного подавления шума, которые снижают влияние вибраций на чувствительные элементы детекторов.
- Квантовый шум существует даже при отсутствии амплитуды лазера из-за квантовой природы света. Он включает шум выстрела, возникающий из-за ошибок в подсчёте фотонов, что соответствует неопределённости в измерении фазы и доминирует на высоких частотах, а также шум давления излучения, вызванный случайным движением зеркал под воздействием флуктуаций мощности лазера, который соответствует неопределённости в амплитуде и доминирует на низких частотах. Для уменьшения этих шумов используется технология «сжатого света», позволяющая коррелировать эти два типа неопределённостей и достигать чувствительности, превышающей квантовый предел, в определённом диапазоне частот [100].

- Гравитационный градиентный шум. Возникает из-за гравитационного взаимодействия между движущимися массами и свободной тестовой массой (зеркалом). Этот шум может быть вызван возмущениями плотности, такими как движение транспортных средств, облаков или поверхностные сейсмические волны (S-волны). Экранировать тестовую массу от гравитационного градиентного шума затруднительно, так как гравитацию невозможно заблокировать. Для уменьшения влияния этого источника шума в будущем планируется размещать детекторы под землёй, чтобы повысить чувствительность на низких частотах.
- Броуновский шум покрытий (тепловой шум тестовой массы I)**.** Возникает из-за механического диссипативного эффекта в покрытиях. Части системы, находящиеся ближе к лазерному пучку, вносят больший вклад в тепловой шум, чем остальные, поэтому оптические покрытия играют доминирующую роль. Этот тип шума может проявляться на самых чувствительных частотах (~100 Гц) наземных детекторов гравитационных волн.
- Тепловой оптический шум покрытий (тепловой шум тестовой массы II) возникает из-за флуктуаций температуры тестовой массы. Он включает термоэластический шум, при котором температурные флуктуации вызывают смещение тестовой массы через коэффициент теплового расширения: локальные области зеркала могут расширяться или сжиматься, изменяя оптическое расстояние. Также он включает терморефракционный шум, при котором температурные флуктуации изменяют показатель преломления покрытий, вызывая фазовый сдвиг лазерного луча, что выглядит как смещение тестовой массы. Оба этих эффекта оказывают значительное влияние на точность измерений и увеличивают общий шум системы.
- Броуновский шум подложки (тепловой шум тестовой массы III) возникает из-за того, что тепловая энергия возбуждает резонансные моды подвешенных зеркал. Ширина резонанса связана с механическими потерями материала подложки тестовой массы (сплавленный кварц). Механические потери в данном случае означают диссипацию энергии за счёт внутреннего трения в материале.
- Тепловой шум подвесов. Возникает из-за теплового возбуждения движений волокон подвеса, на которых подвешено зеркало. Этот шум включает различные режимы вибраций: маятниковый режим, режим «скрипки» и режим вертикального отскока.
- Шум остаточного газа. Трубка плеча детектора не является идеальным вакуумом. Остаточный газ внутри трубок приводит к статистическим вариациям плотности столба газовых частиц на пути лазерного луча, что вызывает флуктуации эффективного показателя преломления вдоль пути распространения.
- Прочие шумы во время работы. Например, вороны в пустыне Хэнфорда [113].

Шум количественно описывается с помощью спектральной плотности мощности (PSD) $S_n(f)$, которая определяется следующим образом [114]:

$$\langle \tilde{n}(f)\tilde{n}(f')\rangle = \frac{1}{2}S_n(f)\delta(f-f'), \tag{1.125}$$

где $\langle ... \rangle$ обозначает среднее по ансамблю, а $\tilde{n}(f)$ – преобразование Фурье шума во временной области $n(t)$. Для отрицательных частот спектральная плотность мощности должна рассчитываться как $S_n(|f|)$.Квадратный корень из PSD называется амплитудной спектральной плотностью (ASD). Для регистрации гравитационного сигнала его амплитуда должна быть, по крайней мере, сравнима с порядком величины ASD. На Рисунке 1.6 приведена иллюстрация вклада различных источников шума в амплитудный спектр шума детектора LIGO. Наиболее чувствительный диапазон LIGO составляет 20–2000 Гц.

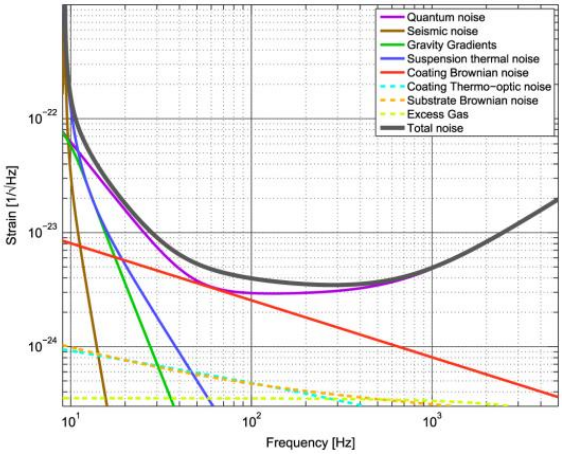


Рисунок 1.6 - Основные шумовые компоненты LIGO [88]

Статистическая модель шума детектора

Статистическая модель шума может быть построена на предположении, что шум является стационарным и гауссовским [111]. Гауссовский шум означает, что $n(t)$ берётся из гауссовского процесса с нулевым средним, а стационарность требует, чтобы характеристики шума не изменялись со временем (по крайней мере, в течение короткого периода). В реальности эти предположения не всегда строго выполняются. В детекторах возникают скачки (глитчи), нарушающие гауссовость шума, а уровень шума может флуктуировать во время работы [115]. Тем не менее, стационарность является разумным приближением для современных детекторов, так как сигналы имеют ограниченную продолжительность из-за низкочастотного шума. Глитчи представляют собой одну из главных проблем качества данных: они часто появляются в измерениях и иногда перекрываются с истинными сигналами [115-117]. Для идентификации и устранения глитчей из данных предпринимаются значительные усилия, включая работы [118-123].

Теперь построим статистическую модель шума. Рассмотрим серию шумовых отсчётов $\{n_i\}$, полученных в моменты времени $\{\{t_i\}$, на протяжении длительности $T, i = 1,2, \dots, N$.. У нас есть $\Delta t = T/(N-1)$, а разность времени

между двумя отсчётами выражается как $t_j - t_k = (j-k)\Delta t$. Так как предполагается, что среднее значение шума равно нулю, функция корреляции и ковариационная функция совпадают:

$$C(t_i, t_j) = \langle n(t_i) n(t_j) \rangle, \tag{1.126}$$

ковариационная матрица может быть определена следующим образом:

$$C_{ij} = C(t_i, t_j). \tag{1.127}$$

Распределение шума $n = \{n_i\}, i = 1,2, \dots, N$ является многомерным гауссовским распределением:

$$P(n) = \frac{e^{-\frac{1}{2} C_{ij}^{-1} n_i n_j}}{\left[(2\pi)^N |det C_{ij}|\right]^{1/2}}, \tag{1.129}$$

где C_{ij}^{-1} – обратная ковариационная матрица, то есть $C_{ij} C_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$ – символ Кронекера. Здесь повторяющиеся индексы подразумевают суммирование, и мы не различаем верхние и нижние индексы. Уравнение (1.128) интерпретируется как «вероятность наблюдения реализации шума $\{n_i\}, i = 1,2, \dots, N$".

Принципиально, статистическая модель уже задана уравнением (1.128), но вычисление функции корреляции во временной области на практике оказывается вычислительно затратным. Поэтому необходимо найти более простое представление.

Поскольку шум является стационарным, корреляция между t_i и t_j зависит только от разности $t_i - t_j$. Это позволяет использовать автокорреляционную функцию $C_n(\tau)$ для описания стохастического процесса. Для $\tau = t_i - t_j$ выполняется:

$$C_n(\tau) = C(t_i, t_j). \tag{1.129}$$

Теорема Винера-Хинчина [124] утверждает, что спектральная плотность мощности (PSD) является преобразованием Фурье автокорреляционной функции:

$$S_n(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \tag{1.130}$$

Знаменатель в уравнении (1.128) является нормировочной константой, которую можно вынести за скобки, поэтому мы сосредоточимся на числителе. В пределе континуума ($\Delta t \to 0, T \to +\infty$) экспонента в уравнении (1.128) может быть переписана с заменой суммирования на интеграл:

$$
\begin{aligned}
C_{jk}^{-1} n_j n_k &= \frac{1}{\Delta t^2} C_{jk}^{-1} n_j n_k \Delta t \Delta t \\
&= \frac{1}{\Delta t^2} \int\int C^{-1}(t_j, t_k) n(t_j) n(t_k) dt_j dt_k \\
&= \frac{1}{\Delta t^2} \int n(t_k) dt_k \int C^{-1}(t_j, t_k) n(t_j) dt_j \\
&= \frac{1}{\Delta t^2} \int n(t_k) dt_k \int \left[\int C^{-1}(t_j, t_k) e^{-2\pi i f t_j} dt_j\right] \tilde{n}^*(f) df,
\end{aligned}
\tag{1.131}
$$

где $C^{-1}(t_j, t_k) = C_{jk}^{-1}$, а верхний индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение. Пределы интегрирования во всех уравнениях предполагаются равными бесконечности и опускаются. Для перехода от третьей строки к последней используется тождество Парсеваля-Планшереля. Для двух функций $a(t)$ и $b(t)$, а также их преобразований Фурье $\tilde{a}(f)$ и $\tilde{b}(f)$, выполняется:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) b^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(f) \tilde{b}^*(f) df. \tag{1.132}
$$

Затем вычисляем выражение в скобках в последней строке уравнения (1.131):

$$
\begin{aligned}
&\int C^{-1}(t_j, t_k) e^{-2\pi i f t_j} dt_j \\
&= \frac{2}{S_n(f)} \int C(t_l, t_j) e^{-2\pi i f (t_l - t_j)} dt_l \int C^{-1}(t_j, t_k) e^{-2\pi i f t_j} dt_j \\
&= \frac{2}{S_n(f)} \int\int C(t_l, t_j) C^{-1}(t_j, t_k) e^{-2\pi i f t_l} dt_l dt_j \\
&= \frac{2\Delta t^2}{S_n(f)} C_{lj} C_{jk}^{-1} e^{-2\pi i f t_l} \\
&= \frac{2\Delta t^2}{S_n(f)} \delta_{lk} e^{-2\pi i f t_l} \\
&= \frac{2\Delta t^2}{S_n(f)} e^{-2\pi i f t_k}.
\end{aligned}
\tag{1.133}
$$

Переходя от первой строки ко второй, мы использовали тот факт, что t_j может принимать любое значение, так как t_l изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Подставляя это в уравнение (1.131), получаем:

$$
\begin{aligned}
C_{jk}^{-1} n_j n_k &= \int n(t_k) dt_k \int \frac{2}{S_n(f)} e^{-2\pi i f t_k} \tilde{n}^*(f) df \\
&= \int \frac{2}{S_n(f)} \tilde{n}^*(f) df \int n(t_k) e^{-2\pi i f t_k} dt_k \\
&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f)}{S_n(f)} df \\
&= 4 \int_{0}^{+\infty} \frac{\tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f)}{S_n(f)} df \\
&= 4 \sum_k \frac{\tilde{n}_k \tilde{n}_k^*}{T S_k} \\
&= \sum_k \frac{\mathrm{Re}(\tilde{n}_k)^2 + \mathrm{Im}(\tilde{n}_k)^2}{T S_k / 4}.
\end{aligned}
\tag{1.134}
$$

Мы изменили пределы интегрирования на $f > 0$, чтобы привести их в соответствие с определением $Sn(f)$. Для дискретизации уравнения использованы: $\Delta f = 1/T, \tilde{n}_k = \tilde{n}(f_k), S_k = S_n(f_k)$. Здесь Re и Im обозначают действительные и мнимые части соответственно. Уравнение (1.134) показывает, что в частотной области действительные и мнимые компоненты шума также подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним и дисперсией $TS_k/4$:

$$\tilde{n}_k \sim N\left(0, \frac{TS_k}{4}\right) + iN\left(0, \frac{TS_k}{4}\right). \tag{1.135}$$

Самое важное состоит в том, что, в отличие от скоррелированного шума во временной области (т.е. не диагональной ковариационной матрицы C_{ij}), частотные бины являются независимыми, а ковариационная матрица в частотной области становится диагональной и равна $diag(TS_k/4)$. Это свойство значительно ускоряет вычисление функции правдоподобия в частотной области по сравнению с временной областью.

Нормировочный множитель можно записать как произведение нормировочных множителей для действительной и мнимой частей, что даёт $\prod_k \frac{\pi TS_k}{2}$. Собрав все уравнения вместе, можно записать функцию правдоподобия из уравнения (1.128) следующим образом:

$$P(n) = \frac{1}{\prod_k \frac{\pi TS_k}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_k \frac{4\tilde{n}_k \tilde{n}_k^*}{TS_k}} \propto e^{-\frac{1}{2}(n|n)}, \tag{1.136}$$

где $(n|n)$– это внутреннее произведение, взвешенное по шуму, которое определяется следующим образом:

$$(a|b) = 4\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{a}^*(f)\bar{b}(f)}{S_n(f)} df = 4\mathrm{Re}\sum_k \frac{\tilde{a}_k^* \bar{b}_k}{TS_k}. \tag{1.137}$$

В литературе существуют и другие эквивалентные определения внутреннего произведения, которые можно использовать без дополнительного уточнения:

$$\begin{aligned}(a|b) &= 4\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{S_n(f)} df \\ &= 4\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S_n(f)} df \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)+\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S_n(f)} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)+\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S_n(f)} df\end{aligned} \tag{1.138}$$

1.3.3 Текущее состояние обнаружения и перспективы развития

С момента первого обнаружения гравитационной волны GW150914 [7] коллаборация LIGO-Virgo-KAGRA (LVK) активно модернизирует детекторы и

провела три наблюдательных цикла (O1 [125], O2 [125] и O3 [126, 127, 128]). На момент написания данной работы четвёртый цикл (O4) находится в процессе. Два детектора Advanced LIGO (aLIGO), H1 в Хэнфорде и L1 в Ливингстоне, участвовали во всех наблюдательных циклах с момента первого обнаружения. Их дальность обнаружения была улучшена с примерно 60 Мпк в начале O1 [125] до примерно 160 Мпк в начале O4 [129]. Детектор Virgo (V1) [102] присоединился к O2 в 2017 году с горизонтом обнаружения около 25 Мпк [125], который был увеличен до 56 Мпк к концу O3. KAGRA [128], являющийся преемником TAMA300 [130], и GEO-600 [131] присоединились к O3 в 2020 году, достигнув горизонта обнаружения около 1 Мпк [132].

На сегодняшний день коллаборацией LVK обнаружено более 100 событий слияния компактных объектов (CBC), включая несколько выдающихся случаев.

- **GW170817** [116] стало первым событием слияния нейтронных звёзд (BNS), связанным с мощным гамма-всплеском (GRB) [133] и нейтрино [134]. Локализация источника была предоставлена через несколько часов после слияния, что позволило учёным по всему миру провести успешные наблюдения в различных диапазонах электромагнитного спектра [49]. Это событие стало началом эпохи мультимессенджерной астрономии. Свойства нейтронных звёзд и килоновы были детально исследованы благодаря GW170817 и его электромагнитным наблюдениям [135, 136].
- **GW190521** [137] стало первым событием слияния чёрных дыр (BBH), чья результирующая чёрная дыра имела массу более 100 M⊙M_\odotM⊙, что указывает на образование чёрных дыр промежуточной массы.
- **GW190814** [138] и **GW230529** [129] содержат компоненту, чья масса находится в промежутке между массами нейтронных звёзд и чёрных дыр, что может указывать на существование экзотических звёзд или новую популяцию известных объектов.

Кроме того, были зафиксированы множество интересных явлений, включая: Высшие моды гравитационных волн [138, 139], Прецессию [140], Орбитальную эксцентриситет [141, 142], Обертоны [143, 144, 145, 146], Отдачу результирующей чёрной дыры [147] и многое другое. На уровне популяции сигналы CBC используются для: Реконструкции популяций компактных объектов [148, 149, 150], Оценки постоянной Хаббла [151, 152, 153, 154], Проверки теорий гравитации [25, 155, 156, 157, 158], Изучения тёмной материи [159, 160]. Хотя другие целевые источники, такие как непрерывные волны и стохастический фон, пока не были надёжно обнаружены, отсутствие результатов позволяет наложить ограничения на соответствующие физические модели [161, 162, 163].

В перспективе ожидается, что LIGO-India начнёт наблюдения во второй половине текущего десятилетия [164]. Тем временем LIGO, Virgo и KAGRA приблизятся к своей проектной чувствительности. Эти детекторы, являющиеся преемниками детекторов первого поколения, работавших в 2000-х годах [165], называются детекторами второго поколения (2G) или 2.5G. Для дальнейшего увеличения чувствительности до теоретического предела наземных интерферометров предложены детекторы третьего поколения (3G). Среди них:

Einstein Telescope (ET) [166] – треугольный интерферометр длиной 10 км, базирующийся в Европе.

- **Cosmic Explorer (CE)** [168, 169] – L-образный интерферометр длиной 20/40 км, расположенный в США.

Эти детекторы, которые планируется ввести в эксплуатацию в 2030-х годах, обладают амбициозными характеристиками чувствительности, обеспечивающими более широкие частотные диапазоны и сниженные уровни шума. Это позволит регистрировать значительную долю событий слияний компактных объектов (CBC) во Вселенной и проводить точные тесты фундаментальных теорий с беспрецедентной точностью [170, 171]. На Рисунке 1.7 представлены проектные характеристики чувствительности текущих и будущих наземных детекторов.

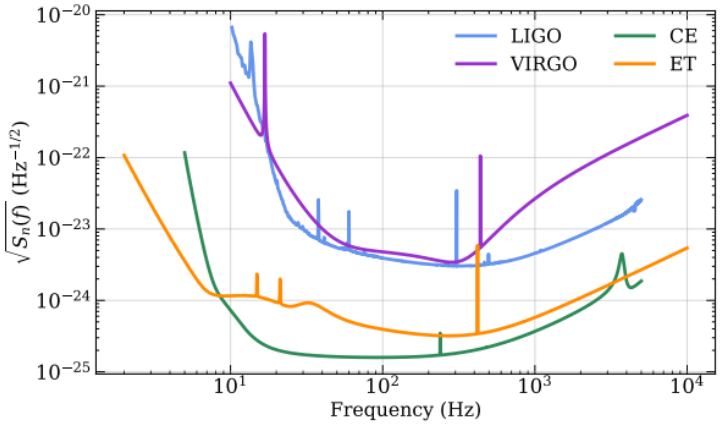


Рисунок 1.7: Проектная чувствительность наземных детекторов гравитационных волн. Источники: LIGO и Virgo: [173]; ET и CE: [174]

Детекторы третьего поколения нацелены на улучшение чувствительности на 1–2 порядка и расширение диапазона чувствительности к более низким частотам. Кроме того, теоретически предложен высокочастотный детектор с новой конфигурацией интерферометра [172], что открывает дополнительные возможности для гравитационно-волновой астрономии.

1.3.4 Другие типы детекторов

Ограниченные сейсмическим шумом на низких частотах, наземные детекторы не могут регистрировать гравитационные волны ниже 1 Гц, даже с использованием детекторов третьего поколения (3G). Для захвата источников гравитационных волн в более низких частотных диапазонах предложены или уже построены несколько других типов детекторов. Здесь представлен краткий обзор таких детекторов. Обсуждение резонансных баров опущено, так как на момент написания этой работы они больше не являются активно исследуемым направлением.

Космические интерферометры

Отправка интерферометров в космос является прямым способом устранения сейсмических шумов, а использование более длинных плеч в космосе идеально подходит для регистрации гравитационных волн низкой частоты. Laser Interferometer Space Antenna (LISA) [175] – первый предложенный космический детектор гравитационных волн. LISA состоит из трёх космических аппаратов,

оснащённых лазерами и тестовыми массами, которые вращаются друг вокруг друга на расстоянии 2.5×10^6 км. Плоскость детекторов наклонена на 60° к эклиптике, а центр масс находится на гелиоцентрической орбите, отстающей от Земли примерно на 60 миллионов км. LISA чувствителен в частотном диапазоне 10^{-4}Гц, нацеливаясь на такие источники, как:

- Сверхмассивные двойные чёрные дыры (SMBBHs),
- Источники экстремального массового отношения (EMRIs),
- Стохастические гравитационные волны,
- Двойные системы звёздной массы.

Европейское космическое агентство (ESA) запустило экспериментальный спутник LISA Pathfinder [176] в декабре 2015 года для проверки возможности поддержания относительного положения двух космических аппаратов с необходимой точностью. Эксперимент оказался успешным, и ESA официально утвердило миссию LISA в январе 2024 года. Ожидается, что запуск LISA состоится в 2030-х годах.

Помимо LISA, Китай предложил два космических детектора гравитационных волн: TianQin [177] и Taiji [178], работающие в аналогичных частотных диапазонах, что и LISA. Оба проекта используют треугольные конфигурации. Taiji имеет орбиту, аналогичную LISA, но находится впереди Земли на её орбите (Earth-leading). Длина плеч составляет 3×10^6км. **TianQin** использует геоцентрическую орбиту, где нормаль плоскости детектора направлена на эталонный источник RX J0806.3+1527. Длина плеч составляет 1.7×10^5 км. Оба проекта планируют запуск детекторов в 2030-х годах. Для проверки ключевых технологий они уже запустили экспериментальные спутники: TianQin-1 [179] и Taiji-1 [180].

Япония предложила космический детектор гравитационных волн DECI-hertz Gravitational-wave Observatory (DECIGO) [181], который предназначен для заполнения разрыва между наземными детекторами и детекторами, подобными LISA. DECIGO состоит из трёх космических аппаратов, расположенных в треугольной конфигурации на геоцентрической орбите. Эти аппараты формируют три резонатора Фабри-Перо с длиной около 1000 км. В совокупности интерферометрические детекторы гравитационных волн охватят спектр от порядка 10^{-4}Гц до порядка 10^3Гц, обеспечивая наблюдения в широком диапазоне частот и расширяя возможности гравитационно-волновой астрономии.

Пульсарные временные массивы

Предложение использовать пульсары для обнаружения гравитационных волн было впервые выдвинуто Сажиным [182] и Детвейлером [183], а позже расширено Хеллингсом и Даунсом [184]. Гравитационные волны с галактическими длинами волн (10^{-9}–10^{-6}Гц) могут изменять время прихода радиосигналов от пульсаров. Для набора галактических пульсаров изменения времени прихода, вызванные гравитационными волнами, проявят корреляции, зависящие от их угловых расстояний, тогда как шумы или ошибки не будут демонстрировать такой зависимости. Анализируя корреляции времени прихода сигналов, можно реконструировать фон гравитационных волн на галактическом

масштабе. Потенциальными источниками таких волн являются сверхмассивные двойные чёрные дыры (SMBBHs) и низкочастотный стохастический фон.

Пульсарный временной массив (Pulsar Timing Array, PTA) представляет собой совокупность галактических миллисекундных пульсаров, наблюдаемых для регистрации гравитационных волн. Миллисекундные пульсары отличаются высокой стабильностью, что делает их идеальными кандидатами для измерений времени прихода импульсов. Для достижения значимых результатов обычно требуется наблюдение достаточного количества пульсаров на протяжении нескольких лет.

После сбора данных за 10 лет сообщество PTA, включая такие проекты, как North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav), International Pulsar Timing Array (IPTA), European Pulsar Timing Array (EPTA), Chinese Pulsar Timing Array (CPTA) и Parkes Pulsar Timing Array (PPTA), сообщило о надёжном обнаружении стохастического фона гравитационных волн в наногерцовом диапазоне [84, 85, 86, 87], открыв новое окно в спектре гравитационных волн.

Другие разработки

Помимо резонансных баров, лазерных интерферометров и пульсарных временных массивов, было предложено множество других конструкций детекторов гравитационных волн. Например, атомная интерферометрия предложена для регистрации гравитационных волн в диапазоне от мГц до 10 Гц [185], а позже её концепция была расширена на космическую атомную интерферометрию [186] и нейтронную интерферометрию [187]. Ещё одним подходом является использование природных объектов в качестве гигантских резонансных баров, таких как Лунная гравитационно-волновая антенна (Lunar Gravitational-wave Antenna), которая предполагает размещение инерциальных датчиков на Луне для мониторинга её реакции на гравитационные волны в диапазоне от мГц до 1 Гц [188]; аналогичный метод был применён для Земли [189]. Также существуют другие методы наложения ограничений на гравитационные волны, включая поляризацию реликтового излучения (CMB) [190], астрометрию [191] и доплеровское измерение расстояния до космических аппаратов [192]. Эти подходы открывают дополнительные возможности для исследования гравитационных волн и наложения ограничений на их свойства и источники.

1.4 Моделирование формы сигнала CBC

1.4.1 Параметризация компактных двойных систем

Источники CBC (слияния компактных двойных систем) описываются набором параметров, которые можно разделить на две категории: внутренние параметры и внешние параметры. Внутренние параметры описывают собственные свойства источников и включают массы ($m_1 m_2$) и трёхмерные спины (S_1,S_2) двух компонентов, что в сумме даёт 8 параметров. Если система содержит нейтронные звёзды, для каждой нейтронной звезды добавляется дополнительный параметр Λ, который характеризует приливные деформации (равный нулю для чёрных дыр) [136].

$$\Lambda = \frac{2k_2}{3}\left(\frac{R}{Gm}\right)^5, \tag{1.139}$$

где k_2– безразмерный параметр для $\ell = 2$, описывающий, как нейтронные звёзды реагируют на внешние приливные силы. R – радиус нейтронной звезды. Если орбита системы имеет эксцентриситет, для её параметризации требуются ещё два параметра: орбитальный эксцентриситет и эксцентрическая аномалия [110]. Внешние параметры не влияют на физику источника, но могут сказываться на наших наблюдениях. Для наземных детекторов они включают угол наклона орбиты ι, трёхмерную локализацию на небе (например, прямое восхождение α, склонение δ и светимостьное расстояние d_L), угол поляризации ψ, фазу слияния ϕ_c и время слияния t_c , что в сумме даёт 7 параметров. Светимостьное расстояние d_Lсвязано с красным смещением z через заданную космологическую модель. Стоит отметить, что наблюдаемые массы (часто называемые массами в системе детектора) также связаны с красным смещением z, так как гравитационные волны испытывают красное смещение на фактор $(1 + z)$ при распространении на космологическое расстояние [6]. Поскольку частота гравитационных волн обратно пропорциональна массе системы, масса в системе источника и масса в системе детектора также связаны через фактор $(1 + z)$:

$$m_{\text{detector}} = (1 + z)m_{\text{source}}. \tag{1.140}$$

Математически это можно вывести, преобразуя все термины, связанные с красным смещением, в форме сигнала гравитационных волн (уравнение 1.84) к наблюдаемым величинам в системе детектора. Это включает преобразования между временем наблюдателя $\tau_{detector}$ и временем в системе источника τ_{source} , а также между координатным расстоянием r и светимостьным расстоянием d_L. Фактор красного смещения $(1 + z)$ полностью поглощается в чирп-массе: $\mathcal{M}_{\text{detector}} = (1 + z)\mathcal{M}_{\text{source}}$ а амплитуда гравитационной волны уменьшается с увеличением светимостьного расстояния d_L, вместо координатного расстояния r. Детальные расчёты можно найти в работе [6].

Для некоторых параметров возможно использование нескольких эквивалентных параметризаций. Выбор параметризации может существенно повлиять на анализ данных, поскольку определённые комбинации параметров помогают избежать вырождения, упрощая точное определение значений параметров. Например, вместо компонентных масс $(m_1 m_2)$ можно использовать $(\mathcal{M}, q)$, где $\mathcal{M}$ – это чирп-масса, определённая в уравнении 1.76, а $q = m_2/m_1$ – соотношение масс. Чирп-масса оказывает доминирующее влияние на форму сигнала на этапе инспирального движения, и комбинация $(\mathcal{M}, q)$ имеет меньше вырождений, чем $(m_1 m_2)$. Аналогично, компоненты спинов естественным образом параметризуются их шестью пространственными компонентами (часто называемыми системой излучения), но для анализа данных более удобной является параметризация с использованием величин спинов и углов наклона $(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \phi_{12}, \phi_{JL})$ [193], где a_i безразмерная величина спина. Эта

параметризация позволяет более эффективно анализировать сигналы гравитационных волн, минимизируя корреляции между параметрами.

$$a_i = \left| \frac{\mathbf{S_i}}{Gm_i^2} \right| \tag{1.141}$$

Величина спина a_i изменяется в пределах от 0 до 1. Полный угловой момент системы $\boldsymbol{J}$ представляет собой комбинацию орбитального углового момента $\boldsymbol{L}$ (перпендикулярного к плоскости орбиты (x, y) и углового момента, связанного со спинами компонентов:

$$\mathrm{J} = \mathrm{L} + \mathrm{S_1} + \mathrm{S_2}. \tag{1.142}$$

Иллюстрация этих векторов и углов представлена на Рисунке 1.8. Спины компонентов могут быть не выровнены с нормалью к орбите, и их углы наклона относительно $\boldsymbol{L}$ обозначаются как θ_1 и θ_2.В этом случае угол между $\boldsymbol{J}$ (общим угловым моментом) и $\boldsymbol{L}$ (орбитальным угловым моментом) обозначается как ϕ_{JL} ; он описывает отклонение общего углового момента от нормали к орбите. Угол между направлением наблюдателя $\hat{n}$ и $\boldsymbol{J}$ обозначается как θ_{JN}, а угол между $\hat{n}$ и $\boldsymbol{L}$ – как угол наклона ι. Для описания геометрии достаточно одного из них. Поскольку $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{J}$ не выровнены, $\boldsymbol{L}$ прецессирует вокруг $\boldsymbol{J}$ [194]. Поэтому для систем с прецессией более удобно использовать θ_{JN} вместо ι. Угол φ_{12} – это азимутальный угол между единичными векторами $\hat{S}_2$ и $\hat{S}_1$, измеренный относительно $\hat{L}$. Здесь знак (^) указывает на единичные векторы.

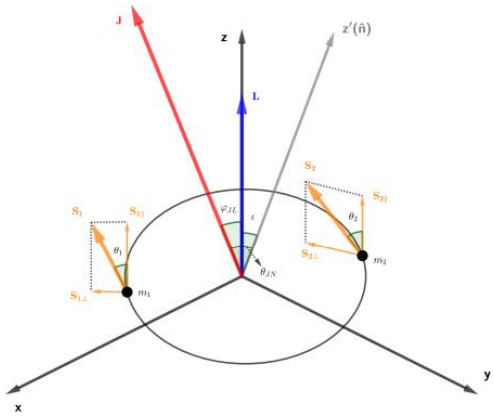


Рисунок 1.8 - Иллюстрация углов спинов. $\boldsymbol{J}$ – полный угловой момент двойной системы, $\boldsymbol{L}$ – орбитальный угловой момент, $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ – угловые моменты спинов компонентов. Система координат (x, y, z) представляет собой систему излучения, в которой определяются компоненты спинов $(S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}, S_{2x}, S_{2y}, S_{2z})$. Ось z' указывает на наблюдателя. Фаза орбиты на данном рисунке не показана

На практике эти углы изменяются в процессе эволюции двойной системы [195], поэтому необходимо задавать опорную частоту f_{reff} , чтобы указать, при какой частоте определяются эти углы.

Основным параметром спина является эффективный спин χ_{eff}, представляющий собой взвешенное по массе сочетание компонент спина вдоль направления $\boldsymbol{L}$ [196, 197, 198]:

$$\chi_{\mathrm{eff}} = \frac{a_1 \cos\theta_1 + q a_2 \cos\theta_2}{1+q}. \tag{1.143}$$

Эффективный прецессионный спин χ_P отвечает за прецессионные эффекты в системе и определяется следующим образом [201, 202]:

$$\chi_{\mathrm{P}} = max\left(a_1 \sin\theta_1, \frac{3+4q}{4+3q} q a_2 \sin\theta_2\right). \tag{1.144}$$

χ_{eff} и χ_{P} часто используются для количественной оценки спина и прецессии в двойных системах [140, 203, 204].

Аналогично, приливные параметры Λ_i в системах с двойными нейтронными звёздами (BNS) иногда перепараметризуются как $\widetilde{\Lambda}$ [205], где:

$$\widetilde{\Lambda} = \frac{16}{13} \frac{(m_1+12m_2)m_1^4\Lambda_1 + (m_2+12m_1)m_2^4\Lambda_2}{(m_1+m_2)^5}. \tag{1.145}$$

$$\delta\overline{\Lambda} = \frac{(1319m_1^2 - 7996m_1m_2 - 11005m_2^2)m_1^4\Lambda_1 - (1319m_2^2 - 7996m_1m_2 - 11005m_1^2)m_2^4\Lambda_2}{1319(m_1+m_2)^6}. \tag{1.145}$$

1.4.2 Моделирование формы сигнала

Мы вывели форму сигнала для инспиральной стадии слияния компактных двойных систем в ведущем порядке в секции 1.1.5. Однако для надёжного анализа данных требуется более высокая точность и учёт дополнительных физических эффектов в моделях формы сигнала. В этом разделе я кратко представлю основные подходы к моделированию формы сигнала для источников CBC.

Постньютоновская форма сигнала

Когда двойная система находится на большом расстоянии и движется с низкой скоростью, постньютоновское (PN) приближение можно использовать для итеративного расширения формы сигнала до более высоких порядков в терминах $\mathcal{O}((v/c)^n)$.

Изучение PN-методов началось в ранние годы развития OTO и остаётся активным направлением исследований до сих пор. Хороший обзор представлен в работе[206].

Порядок $\mathcal{O}((v/c)^N)$. называется $N/2$-PN порядком. Например, для порядка 3.5PN фаза гравитационных волн для невращающейся двойной системы в рамках

стационарной фазы (SPA, уравнение 1.95) модифицируется следующим образом [207]:

$$\begin{aligned}\psi_{3.5\mathrm{PN}}(f) = {} & 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128\eta v^5}\Big[1 + \frac{20}{9}\Big(\frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta\Big)v^2 \\ & -16\pi v^3 + 10\Big(\frac{3058673}{1016064} + \frac{5429}{1008}\eta + \frac{617}{144}\eta^2\Big)v^4 \\ & +\pi\Big(\frac{38645}{756} - \frac{65}{9}\eta\Big)\Big\{1 + 3\ln\Big(\frac{v}{v_{\mathrm{ISCO}}}\Big)\Big\}v^5 \\ & +\Big\{\frac{11583231236531}{4694215680} - \frac{640}{3}\pi^2 - \frac{6848\gamma}{21} - \frac{6848}{21}\ln(4v) \\ & +\Big(-\frac{15737765635}{3048192} + \frac{2255\pi^2}{12}\Big)\eta + \frac{76055}{1728}\eta^2 - \frac{127825}{1296}\eta^3\Big\}v^6 \\ & +\pi\Big(\frac{77096675}{254016} + \frac{378515}{1512}\eta - \frac{74045}{756}\eta^2\Big)v^7\Big],\end{aligned} \tag{1.147}$$

где $\eta = m_1 m_2/(m_1 + m_2)^2$ – симметричное соотношение масс, $m = m_1 + m_2$ – общая масса системы, $v = (\pi G m f)^{1/3}$ – характерная скорость в системе, а v_{ISCO} – характерная скорость на внутренней границе устойчивой круговой орбиты (ISCO). $\gamma = 0.577216...$– постоянная Эйлера. Фаза из уравнения 1.95 соответствует первому члену $1(= v^0)$ в квадратных скобках, то есть является уравнением нулевого порядка PN-приближения.

PN формы сигналов являются аналитическими, что делает их вычисление быстрым. Они также предоставляют чёткое представление о физике и дают ценные идеи для анализа данных. В уравнении 1.147 нет членов отрицательного PN порядка – такие члены могли бы быть связаны с запрещёнными в ОТО модами, например, дипольное излучение появилось бы на уровне −1PN, если бы оно существовало. Члены порядка 0.5PN естественным образом отсутствуют в ОТО. Член 1PN вводит соотношение масс, что позволяет измерять массы компонентов системы, а не только чирп-массу. Эффекты спинов на ведущем порядке (спин-орбитальное взаимодействие) впервые появляются на уровне 1.5PN в виде взвешенного по массе среднего спинов компонентов (примерно в форме χ_{eff}) [199, 200, 208]. Это приводит к вырождению между соотношением масс и χ_{eff}, однако введение спиновых членов более высокого порядка может ослабить это вырождение. Перпендикулярные компоненты спинов начинают вносить вклад в фазу на уровне 2PN (спин-спиновое взаимодействие) [208, 209]. Зависимость от частоты компенсируется на уровне 2.5PN, что вызывает некоторое вырождение между соотношением масс и фазой слияния. Приливные параметры для систем с двойными нейтронными звёздами впервые появляются на уровне 5PN, что указывает на относительно слабый эффект приливных взаимодействий. Тем не менее, эти эффекты обнаружимы, так как их влияние на фазу гравитационных волн может накапливаться со временем.

Численное моделирование общей теории относительности

PN формы сигналов сохраняют высокую точность на стадии сближения, но по мере того, как компактные звёзды приближаются друг к другу и начинается этап слияния, точность PN-расширения теряется. В этот момент необходимо

использовать численное моделирование общей теории относительности (Numerical Relativity, NR) [206], которое включает численное интегрирование уравнений поля Эйнштейна и моделирование эволюции системы от начального до конечного состояния [210, 211]. Из-за сложности уравнений Эйнштейна (свободы калибровки, координатные сингулярности, начальные и граничные условия и т.д. [212]) и ограничений вычислительных ресурсов моделирование слияний двойных чёрных дыр (BBH) стало возможным только в 2000-х годах [213, 214]. В настоящее время численное моделирование обеспечивает самые точные формы сигналов гравитационных волн для систем CBC, включая нейтронные звёзды [215, 216]. Существуют несколько каталогов форм сигналов, полученных с помощью NR [217, 218, 219]. Однако NR-моделирование чрезвычайно ресурсоёмко: создание коротких форм сигналов, охватывающих поздний этап сближения и стадию слияния, обычно занимает недели или месяцы. Несмотря на свою точность, каталоги NR содержат только сотни или тысячи сигналов, что относительно мало, учитывая многомерность параметрического пространства. Из-за этих ограничений NR-сигналы обычно используются для калибровки других моделей форм сигналов, проверки их корректности или в качестве вводимого сигнала. Прямое использование NR-сигналов в анализе данных встречается редко, но возможно [220].

Стоит отметить, что, в отличие от разложения по моментам источника (которое приводит к квадрупольной формуле, уравнение 1.46) или постньютоновского разложения, в численных моделированиях общей теории относительности (NR) и многих других моделях формы сигнала часто используется разложение по мультиполям [221]. Обсуждения согласования этих разложений можно найти в работах [6, 206, 222]. В разложении по мультиполям поляризации «плюс» и «крест» комбинируются в виде комплексного числа и разлагаются следующим образом:

$$h(t) = h_+(t) - ih_\times(t) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_{-2}Y_{\ell m}(\varphi_0, \iota) h_{\ell m}(t), \quad (1.148)$$

где (φ_0, ι) соответствуют фазе и углу наклона, которые определяют положение наблюдателя в системе координат источника. ${}_{-2}Y_{\ell m}$ – сферические гармоники со спином −2 [221, 223]. Формы сигналов гравитационных волн рассчитываются путём решения для $h\ell m(t)$, где $(\ell = 2, m = \pm 2)$ являются доминирующими модами гравитационных волн, а остальные называются высшими модами или мультиполями. Это разложение связано с уходящим поперечным вейлевским скаляром Ψ_4, который содержит всю информацию о гравитационных волнах [224] и является производной от деформации гравитационных волн ($h(t)$) [225].

$$\Psi_4 = \ddot{h}_+(t) - i\ddot{h}_\times(t). \quad (1.149)$$

Квазинормальные моды (Quasi-Normal Modes, QNMs)

Численные расчёты общей теории относительности показали, что результирующим объектом после слияния двойных чёрных дыр (BBH) является возмущённая чёрная дыра Керра. Это состояние было детально исследовано как

теоретически, так и численно [44, 226]. Возмущённая чёрная дыра излучает затухающие гравитационные волны, связанные с квазинормальными модами (QNMs) её колебаний; этот этап называется затуханием (ringdown). Гравитационные волны на стадии затухания можно разложить по сфероидальным гармоникам со спином и угловыми индексами (ℓ, m) [227, 228, 229]. Эти сфероидальные гармоники могут быть дополнительно выражены в виде разложения по сферическим гармоникам со спином, которые используются в численных моделированиях [223, 229]. Для каждой пары индексов (ℓ, m) существует дополнительный целый индекс nnn, характеризующий форму сигнала:

- $n = 0$ соответствует наиболее долгоживущей доминирующей моде.
- $n \geq 1$ представляют обертоны [230].

В общем случае форма сигнала на этапе затухания во временной области может быть записана как суперпозиция затухающих синусоид [228, 231]:

$$h_{\ell m}(t) = \sum_{n=0} C_{\ell mn} e^{-i\omega_{\ell mn}(t-t_0)} t \geq t_0, \quad (1.150)$$

где t_0– время, когда система завершает нелинейную фазу слияния и начинается этап затухания [232, 233, 234]. Согласно теореме "no-hair" чёрных дыр [235, 236], характеристики частот (спектра) и длительность затухания полностью определяются массой и спином результирующей чёрной дыры. Таким образом, комплексные частоты $\omega_{\ell mn}$ зависят исключительно от массы и спина результирующей чёрной дыры и могут быть предсказаны теорией возмущений, если известны эти параметры [226]. Однако комплексные амплитуды $C_{\ell mn}$ зависят от конфигурации системы и динамики вблизи момента слияния. Эти амплитуды необходимо подгонять на основе всего процесса слияния, для чего используется численное моделирование (NR). Преобразование Фурье уравнения 1.150 даёт функцию Лоренца. Этот аналитический результат полезен для моделирования форм сигналов этапа затухания в частотной области [237].

1.4.3 Эталонные формы сигналов

С точки зрения анализа данных, существуют несколько ключевых характеристик моделей формы сигналов, которым необходимо уделять особое внимание, так как они являются основой успешного (корректного и практичного) анализа данных.

Во-первых, все модели формы сигналов являются приближёнными решениями уравнений поля Эйнштейна, поэтому их точность должна тщательно оцениваться. **MM(Mismatch-**несоответствие**)** по сравнению с истинной формой сигнала является широко используемой метрикой для оценки точности аппроксимаций формы сигнала. MM между двумя формами сигналов h_1, h_2 определяется как:

$$\text{MM} = 1 - \max_{t,\phi} \frac{(h_1|h_2)}{\sqrt{(h_1|h_1)(h_2|h_2)}}, \quad (1.151)$$

где $(\dots|\dots)$– внутреннее произведение, определённое в уравнении 1.137. Значение несоответствия изменяется в пределах от 0 до 1, где 0 указывает, что две формы сигналов идентичны (или отличаются только на постоянный множитель). Однако из-за различных соглашений о параметрах формы сигналов h_1 и h_2 могут отличаться некорректными временным и фазовым сдвигами. Поэтому при вычислении несоответствия часто необходимо применить временной и фазовый сдвиги к $h_2 \to h_2 e^{-2\pi i f \delta t - i\delta\phi}$, где параметры $(\delta t,\ \delta\phi)$ подбираются так, чтобы минимизировать несоответствие. Поиск оптимальных значений δt, и $\delta\phi$ можно выполнить с использованием обратного преобразования Фурье, что эффективнее, чем сеточный поиск [270].

$$\begin{aligned}
&(h_1 - h_2 e^{-2\pi i f \delta t - i\delta\phi} | h_1 - h_2 e^{-2\pi i f \delta t - i\delta\phi}) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(h_1^* - h_2^* e^{2\pi i f \delta t + i\delta\phi})(h_1 - h_2 e^{-2\pi i f \delta t - i\delta\phi})}{S_n(f)} df \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1^* h_1 + h_2^* h_2 - h_1 h_2^* e^{2\pi i f \delta t + i\delta\phi} - h_1^* h_2 e^{-2\pi i f \delta t - i\delta\phi}}{S_n(f)} df \\
&= ||h_1||^2 + ||h_2||^2 - 4\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1 h_2^* e^{2\pi i f \delta t} e^{i\delta\phi}}{S_n(f)} df\right] \\
&= ||h_1||^2 + ||h_2||^2 - 4\mathrm{Re}\left[e^{i\delta\phi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1(f) h_2^*(f)}{S_n(f)} e^{2\pi i f \delta t} df\right],
\end{aligned} \tag{1.152}$$

Где

$$||h_i||^2 = (h_i|h_i), \tag{1.153}$$

это норма деформации. Теперь задача сводится к максимизации:

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\delta\phi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1(f) h_2^*(f)}{S_n(f)} e^{2\pi i f \delta t} df\right] \tag{1.154}$$

Обратите внимание, что интеграл представляет собой обратное преобразование Фурье. Пусть:

$$\tilde{X}(f) = \frac{h_1(f) h_2^*(f)}{S_n(f)} \tag{1.155}$$

$$X(\delta t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{X}(f)) = (h_1^*(f)\ |\ h_2^*(f) e^{2\pi i f \delta t}) \tag{1.156}$$

где $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье. Нам необходимо максимизировать:

$$\mathrm{Re}[e^{i\delta\phi} X(\delta t)] \tag{1.157}$$

$\tilde{X}(f)$ легко вычислить, после чего можно выполнить обратное преобразование Фурье, чтобы найти $X(\delta t)$. Точка, в которой $|X(\delta t)|$ достигает своего максимума, определяет оптимальное значение δt, обозначаемое как $\hat{\delta} t$. Далее, для максимизации действительной части $e^{i\delta\phi} X(\hat{\delta} t)$, значение $\delta\phi$ должно быть $\delta\hat{\phi} = -\arg X(\delta\hat{t})$,где arg обозначает аргумент комплексного числа. Таким образом, $\hat{\delta} t$

отвечает за максимизацию модуля $|X(t)|$, $\delta\hat{\phi}$ используется для поворота $X(t)$ на действительную ось, так что $\mathrm{Re}X(t) = |X(t)|$.

Истинная форма сигнала на практике неизвестна, поэтому аппроксимации формы сигнала обычно сравниваются с NR-формами сигналов (численное моделирование общей теории относительности). В зависимости от сложности двойной системы:

- Последняя версия IMRPhenom (IMRPhenomXPHM [254]) и EOB (SEOBNRv5PHM [242]) достигают несоответствия в пределах 10^{-5} - $10-^{1}$, с медианой около 10^{-3}–10^{-2}.
- Сообщается, что SEOBNRv5PHM более точна, чем IMRPhenomXPHM [242], но требует больше времени для вычислений.
- Методы редукции моделей (ROMs) обычно достигают несоответствия менее 10^{-3}по сравнению с оригинальной формой сигнала, на основе которой они были построены.
- Последняя версия NRSur (NRSur7dq4 [262]) превосходит IMRPhenom и EOB по точности, с несоответствием 10^{-6}–10^{-2} и медианой около 10^{-4}–10^{-3}.

Следует отметить, что даже NR-симуляции имеют оценочное несоответствие выше 10^{-7} и вплоть до 10^{-1} [271].

Аппроксимации формы сигналов могут быть предварительно вычислены до анализа данных (например, для создания банка шаблонов [272]) или вычисляться непосредственно во время анализа данных (например, для оценки параметров [273]). Очевидно, что последний подход требует большей скорости генерации формы сигнала.

Типичный байесовский анализ параметров требует миллионы вычислений формы сигнала [274], что делает скорость генерации критически важной. Время генерации зависит от длины формы сигнала – оно увеличивается при задании более низкой минимальной частоты или меньших масс системы. Также на время генерации влияет сложность системы.

Для сигналов CBC звёздной массы с начальной частотой 20 Гц:

- **Аналитические формы сигналов** (PN, IMRPhenom, ROM) обычно могут быть сгенерированы за время менее 100 мс.
- **EOB формы сигналов** требуют решения обыкновенного дифференциального уравнения, поэтому их генерация занимает больше времени, обычно порядка $\mathcal{O}(1)$ секунды, хотя в последней версии EOB сообщается об улучшении до $\mathcal{O}(100)$ мс [242].

Помимо традиционных платформ для генерации форм сигналов, работающих на CPU и основанных на языке C, было предложено использование GPU для ускорения вычислений. Это привело к увеличению скорости примерно в $\mathcal{O}(10)$ раз на крупных GPU [275].

Компактные объекты, как правило, имеют спин. Если угловой момент спина не совпадает с орбитальным угловым моментом, система будет испытывать прецессию. Если система образовалась динамически, её орбита может быть эксцентрической, а не квазикруговой, хотя со временем орбита постепенно становится круговой из-за потери энергии. Кроме того, если орбита системы

наблюдается с ребра (edge-on) и массы объектов неодинаковы, можно зарегистрировать влияние субдоминантных мультиполей. На Рисунке 1.9 приведены сравнения форм сигналов, учитывающих прецессию, эксцентриситет, высшие моды, и «обычные» сигналы с выровненными спинами. Все эти эффекты вызывают модуляции амплитуды, но с различной величиной и на разных временных масштабах [276]. Эти модуляции сложно различить, если сигнал недостаточно продолжителен или громок [277].

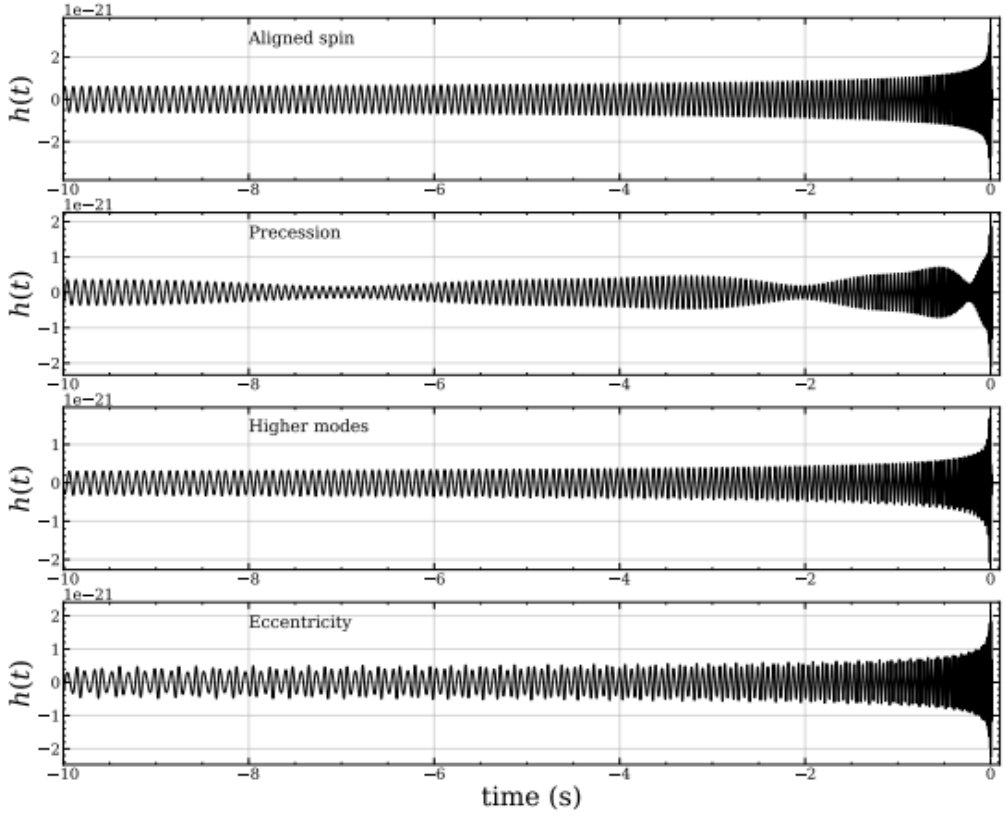


Рисунок 1.9: Иллюстрации различных высших порядков эффектов гравитационных волн для бинарной системы с массами $50 + 10M_{\odot}$. Показана поляризация «плюс». Модель формы сигнала с выровненными спинами представлена IMRPhenomD, модель с прецессией – IMRPhenomPv2, модель с высшими модами – SEOBNRv4HM, а модель для эксцентрической орбиты – SEOBNRE. Выбор моделей формы сигнала, углов наклона, спинов и параметров эксцентриситета был выполнен так, чтобы выделить видимые эффекты и показать только целевой эффект

Эти явления представляют научный интерес, но их сложно моделировать, и их игнорирование может привести к смещению результатов анализа данных [278, 279]. Поэтому они привлекли значительное внимание в сообществе, занимающемся моделированием форм сигналов. С развитием численного моделирования общей теории относительности (NR) [280, 281] были разработаны аппроксимации форм сигналов, учитывающие высшие моды для систем с прецессией (например, IMRPhenomXPHM [254], SEOBNRv5PHM [242] и NRSur7dq4 [262]) и для эксцентрических систем (например, SEOBNRv4EHM

[249], SEOBNREHM [282], NRSur2dq1Ecc [264]). Однако из-за недостаточного числа NR-симуляций в пространстве параметров спина и эксцентриситета эти модели не оптимально откалиброваны и становятся менее точными при сильных эффектах прецессии или эксцентриситета. Кроме того, включение как прецессии, так и эксцентриситета в одну модель формы сигнала остаётся сложной задачей. Большинство упомянутых аппроксимаций учитывают только один из этих эффектов. Недавняя попытка включить оба эффекта описана в [283].

1.5 Заключение раздела 1

В этом разделе, сосредоточенном на слияниях компактных двойных систем (CBC) и наземных детекторах, представлено теоретическое обоснование гравитационно-волновой астрономии. Я начал с общей теории относительности (ОТО) и линейной гравитации, продемонстрировал поляризации гравитационных волн и квадрупольную формулу их генерации. Затем в разделе 1.1 было выведено чирп-сигнал для сближающихся двойных систем. Модели формы сигналов CBC были более подробно рассмотрены в разделе 1.4. С точки зрения наблюдений в разделе 1.2 были представлены различные астрофизические источники гравитационных волн, а в разделе 1.3 описаны конфигурации, отклик и шумовые характеристики детекторов гравитационных волн. Эти материалы предоставляют контекст для исследовательских проектов, представленных в данной диссертации.

2 МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЙ И ВОЛНОВОЙ ХАРАКТЕР ПАРАМЕТРА ХАББЛА

Масштабная инвариантность геометрических объектов проявляется в виде фрактальных структур: малая часть повторяет форму целого. Начиная с работ Б. Мандельброта теория фракталов широко применяется в астрофизике. Однако несоответствие теории с некоторыми наблюдательными фактами, например, с спектральными закономерностями, вызывает необходимость использования “ новых видов фракталов” [283]. Мы рассмотрим возможности использования новых моделей фрактальных множеств описывающего образование предфракталов только в одном направлении.

Целью настоящей работы является определение из аттрактора, полученного из уравнения слабых гравитационных волн значения его фрактальных размерностей и сопоставление результатов теории с наблюдениями.

2.1 Масштабная инвариантность аттрактора сигналов гравитационных волн

Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля имеет вид:

$$R_{ij} = 8\pi G\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right), \tag{2.1}$$

где R_{ij} – тензор кривизны пространства (тензор Риччи), T_{ij} – тензор энергии-импульса, g_{ij} – метрический тензор, G – гравитационная постоянная и принято скорость света $c = 1$.

Примем, что неоднородности в распределении вещества вызывают неоднородности в геометрии пространства. Тогда в синхронной системе отсчета элементы галилеевого метрического тензора с малыми возмущениями $\left|h_{\alpha\beta}(R,t)\right| \ll 1$ можно записать в виде [283, 284]:

$$g_{00} = 1, g_{0\alpha} = 0, g_{\alpha\beta} = -a^2(t)\left[\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}(R,t)\right], \tag{2.2}$$

где $a(t)$ – масштабный фактор расширения Вселенной, $h_{\alpha\beta}(R,t)$ – линейные возмущения кривизны пространства, α, β – компоненты пространственной переменной X.

С учетом условий (2.2) из уравнения (2.1) в работе [283] получено уравнение гравитационных волн

$$a^{-2}\nabla^2 h_{\alpha\beta} = \acute{h}_{\alpha\beta} + 3\left(\frac{\acute{a}}{a}\right)\acute{h}_{\alpha\beta}, \tag{2.3}$$

где ∇ – пространственные производные, точка означает временную производную. Для Фурье-компонент с пространственным волновым числом k,

связанного с длиной поперечных гравитационных волн $\lambda = 2\pi a(t)/k$, имеем для возмущений одной поляризации $h(t)$ уравнение:

$$\frac{d^2h(R,t)}{dt^2} + 3\left(\frac{\acute{a}}{a}\right)\frac{dh(R,t)}{dt} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 h(R,t) = 0. \quad (2.4)$$

Последний член в (4) имеет размерность 1/м2, а первые два – 1/с2, оттого, что было принято, что скорость света равна единице. Перейдем в (4) к пространственным производным по R: $\frac{\partial}{\partial t} \to v_0 \frac{\partial}{\partial R}$, принимается $v_0 = 1$ – скорость гравитационных волн в среде с космическими возмущениями плотности полей и вещества:

$$\acute{h} + 3\left(\frac{\acute{a}}{a}\right)\acute{h} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 h = 0, \quad (2.5)$$

где точки означают производные по координате R. Вывод уравнения (2.5) приведен в работе [283]. Выбор этого вида из множества уравнений гравитационных волн [284] можно обосновать простым способом в рамках таких же использованных приближений, пренебрегая квадратом малых величин. Уравнение (2.5) описывает волновой процесс изменения $h(R)$ в фиксированный момент времени. По определению $\frac{k}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}$- отношение волнового числа к масштабному фактору. Для выяснения смысла $3\left(\frac{\acute{a}}{a}\right)$ примем, что масса материи M с ее плотностью ρ, с масштабным фактором расширения объема a, также с возмущениями $d\rho, da$ связаны как

$$\frac{3}{4\pi}M = \rho a^3, \frac{3}{4\pi}M = (\rho - d\rho)(a + da)^3. \quad (2.6)$$

Почленно поделив эти формулы, пренебрегая квадратами и кубами малых величин $d\rho, da$, через производные $\acute{\rho} = d\rho/dR$, $\acute{a} = da/dR$ получим

$$\frac{\acute{\rho}}{\rho} = 3\frac{\acute{a}}{a}. \quad (2.7)$$

При $\frac{\acute{\rho}}{\rho} > 0$ имеем затухающие колебания, при $\frac{\acute{\rho}}{\rho} < 0$ уравнение (5) описывает незатухающие колебания по R.

Введем параметр Хаббла $H = \acute{a}/a$ как динамическую характеристику задачи и запишем уравнение (2.5) в виде системы, удобной для численного анализа:

$$h = b, \dot{a} = Ha,\ \dot{b} = -3Hb - \left(\frac{a}{R_*}\right)^2 h, \quad (2.8)$$

В отличие от формулы (2.5) в системе уравнений (2.8) волновое число k представлено через физическую характеристику- радиус нулевой гравитации R_*,

так как в скоплениях галактик могут реализоваться гравитационные волны с характерной длиной $\lambda = 2\pi(R_*/a)$:

$$\frac{k}{a} = \frac{2\pi a}{\lambda a} = \frac{a}{R_*} \tag{2.9}$$

Принимаются различные оценки значений R_*. В более общем виде можно принять значения R_* как точки Лагранжа взаимодействующих звезд. В масштабах галактик точки нулевой гравитации приводят к флуктуации движения галактик. До установления глобального расширения по расстоянию имеет место как отталкивание, так и притяжение галактик, что наблюдается как флуктуации и неустойчивость их координаты. Переход к глобальному расширению можно расматривать как результат крупномасштабной флуктуации в виде фазового перехода [285]. Устойчивость точек Лагранжа гравитирующих систем анализируется в современных исследованиях [286]. В силу масштабной инвариантности рассматриваемого явления закономерности будут установлены для $R_* = 1$, значения $R_* > 1$ необходимы для анализа роли множества галактик с различными R_*.

Для коротких волн ($\frac{\lambda}{R_*}\ \frac{a}{kR_*} \ll 1$) из (2.5) следует решение для $h(R)$ в виде гармонических функций. На форму длинных волн влияет неоднородность космического фона (флуктуаций плотности вещества, излучения).

В качестве примера результаты численного анализа системы (8) с начальными значениями $h_0 = 0.01; b_0 = 0.01; a_0 = 1.01$ и параметрами $R_* = 10, H = 10$ представлены на рисунке 2.1 .

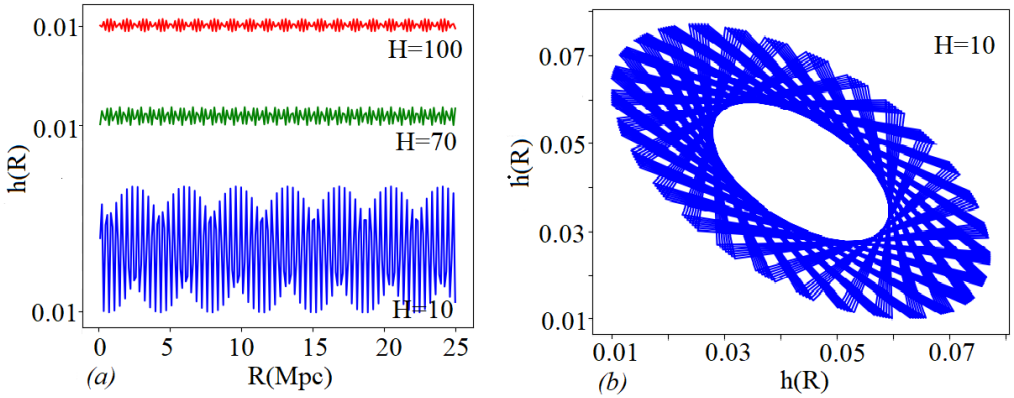


Рисунок 2.1 - Формы гравитационной волны *(a)*, и ее фазовый портрет *(b)*

Значения $h(R)$ убывают с ростом H и колебания становятся структурированной хаотической.

Динамическая система (2.8) имеет фазовые портреты $\left(h(R), \acute{h}(R)\right)$ в виде фрактальных множеств для различных значений параметра H. Были определены корреляционные размерности D аттракторов по формуле

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{log C(\delta)}{log \delta}, C(\delta) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \theta\left(\delta - \left[x_i - x_j\right]\right), \quad (2.10)$$

где δ – масштаб измерения, $C(\delta)$ – корреляционный интеграл, N – число точек множества, $\left[x_i - x_j\right]$ – расстояние между двумя парами точек $(i \neq j)$, $\theta(f)$ – функция Хевисайда. С ростом δ значения $C(\delta)$ насыщаются, соответствующее максимальное значение D_* наблюдается в интервале $50 \leq H \leq 75$ (Рисунок 2.2). По теории мы нашли значение H, деленное на скорость фона $v_0 = 1 kms^{-1}$. Абсолютное значение параметра Хаббла равно H в еденицах $kms^{-1}Mpc^{-1}$. Точное значение максимума $D = D_* = 1.465$ соответствует теоретической модели оригинального фрактала и анализу каталогов галактик.

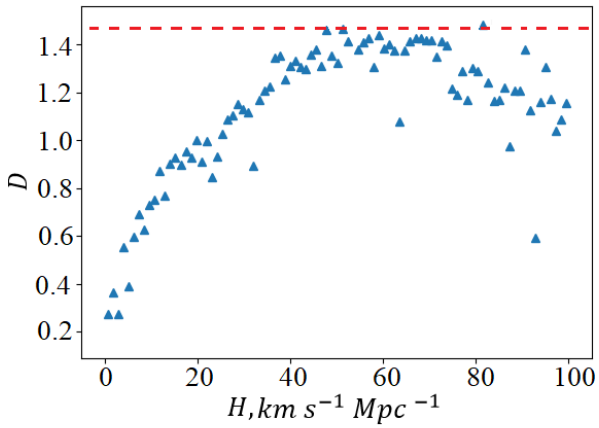


Рисунок 2.2 - Возможность максимума фрактальной размерности странного атрактора динамической системы (2.8)

2.2 Фрактальная размерность множеств расширяющихся галактик

Существует геометрическая модель фрактала со значением $\gamma_* = D - d = 0.465$, где d-топологическая размерность, D – фрактальная размерность. Этот фрактал (Рисунок 2.3), названный ZhF, был предложен З.Ж. Жанабаевым для описания турбулентности в пограничном слое и для создания информационно эффективной фрактальной антенны [287, 288]. Каждый предфрактал (иерархические уровни порядка n) имеет 5 звеньев с относительной длиной 1/3. Вертикальные звенья не являются предфракталами следующего порядка.

Хаусдорфова локальная размерность всех предфракталов порядка n анизотропного фрактала $D = D_* = ln\, N / ln\,(1/\delta) = ln\, 5 / ln\, 3 = 1.465$, где N-число звеньев, δ- безразмерный масштаб измерения. Известны другие фракталы [289] с такой же размерностью D, не зависящей от направления образования предфракталов, однако их топология не отражает специфику одностороннего волнового расширения галактик. Дело в том, что размерность D множества иерархий анизотропного фрактала проявляется только в одном направлении (Рисунок 2.3). Для астрофизического приложения можно обозначить через R координату, через $X(R)$ – расстояние до галактики.

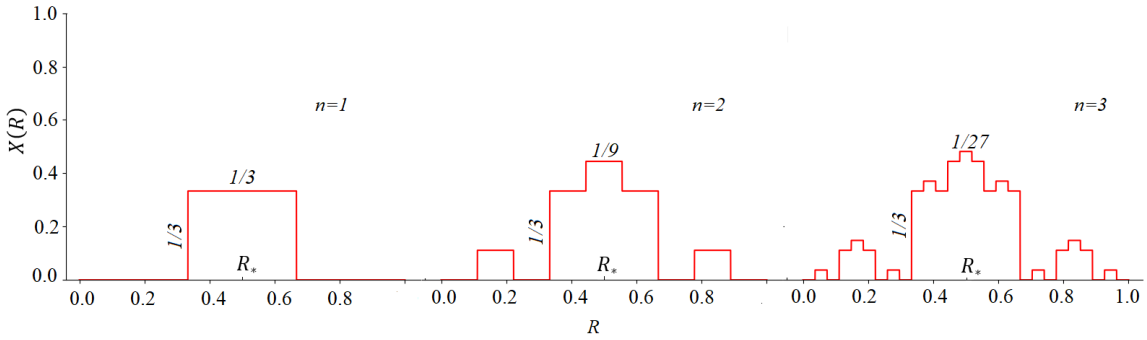


Рисунок 2.3 - ZhF с предфракталами порядка $n = 1,2,3$

Дело в том, что размерность D множества иерархий анизотропного фрактала проявляется только в одном направлении (Рисунок 2.3). Для астрофизического приложения можно обозначить через R координату, через $X(R)$ – расстояние до галактики.

2.2.1 Критерии самоподобия Жанабаева

Критерии самоподобия (Рис 2.4) представляют собой особые значения, на которых информационная энтропия остается постоянной. Такие точки могут служить ключевыми ориентирами для понимания особенностей динамических систем.

Данные критерии взяты на основе формул статьи [290-292], где представлены значения $I_1 = 0.567$ и $I_2 = 0.806$ которые являются единственными неподвижными точками информации и информационной энтропии. Если $P\,(x)$ является вероятностью появления величины x, то количество информации определяется как:

$$I\,(x) = -ln\,P\,(x) \tag{3.3.5}$$

Повторяемость и неравновесность процесса учитывается условием $0< P\,(x) <1$.

После этого можно говорить о вероятности реализации значения информации $P(I)$:

$$P(I) = e^{-I}\,, \qquad 0 \le P(I) \le 1 \tag{3.3.6}$$

Для плотности вероятности $f(I)$ имеем формулы:

$$\int_0^\infty f(I)dI = 1, \quad P(I) = \int_I^\infty f(I)dI, \tag{3.3.7}$$

Формулам (3.3.7) соответствует равенство плотности информации и вероятности ее обнаружения:

$$f(I) = P(I) = e^{-I} \tag{3.3.8}$$

Информационное самоподобие процесса описывается существованием неподвижной точки плотности информации:

$$f(I) = I,\ e^{-I} = I,\ I = I_1 = 0.567 \tag{3.3.9}$$

Информационная энтропия является средним значением информации:

$$H(I) = \int_I^\infty f(I) I dI = \int_I^\infty I e^{-I} dI = (1 + I)e^{-I} \tag{3.3.10}$$

Используя (3.3.1) найдем неподвижную точку энтропии:

$$H(I) = I,\ (1 + I)e^{-I} = I,\ I = I_2 = 0.806 \tag{3.3.11}$$

Самоподобную информационно структурную среду можно описать статистикой Цаллиса, или, квазиканонической статистикой Гиббса [293]. В основе таких теорий лежит использование экспоненциальной функции вида:

$$exp_{q-1}[x] = (1 + (q-1)x)^{\frac{1}{q-1}} \tag{3.3.12}$$

где q-степень однородности, параметр неполноты статистического ансамбля. В пределе $q \to 1$ мы получим обычную экспоненту. Для квазиравновесного процесса, характеризуемого параметром q, информацию определим в виде

$$I(x) = -ln_{q-1}P(x) \tag{3.3.13}$$

Вероятность как функция информации имеет вид:

$$P(I) = exp_{q-1}[-I] = (1 - (q-1)I)^{\frac{1}{q-1}} \tag{3.3.14}$$

Функция плотности распределения вероятности реализации информации $f(I)$ определяется как:

$$f(I) = \frac{d}{dI} exp_{q-1}[-I] = (1 - (q-1)I)^{\frac{2-q}{q-1}} \tag{3.3.15}$$

Для неподвижной точки $f(I) = I$ при $q \to 0$ имеем:

$$I_{i+1} = (1 - (q-1)I_i)^{\frac{2-q}{q-1}} \tag{3.3.16}$$

При значении параметра $q \to 0$ в статистике Цаллиса самоподобное значение информации стремится к значению $I_0 = 0.465$.

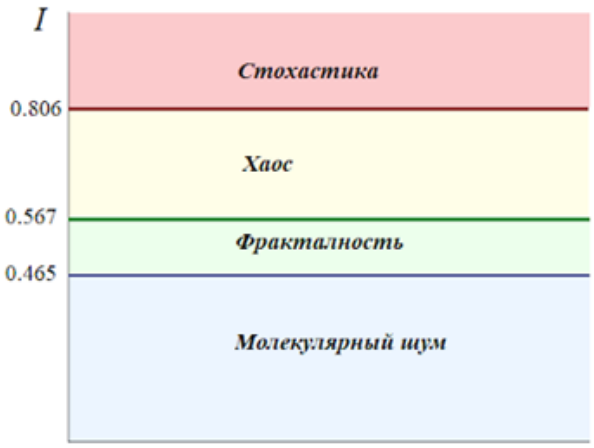


Рисунок 2.4 - Классификация критериев на основе информационных энтропий

Критерий I_0 соответствует предельному случаю масштабной инвариантности в динамике хаотических систем, т. е. переходу от хаоса к масштабно-инвариантной структурности (фрактальности).

2.3 Заключение раздела 2

В ходе исследования было установлено, что фрактальная размерность аттрактора гравитационных волн составляет D=1.465. Это значение является точным максимумом фрактальной размерности, и оно совпадает как с теоретической моделью фрактала ZhF, так и с результатами анализа каталогов галактик [294-295]. Кроме того, оно отражает масштабно-инвариантную природу гравитационных волн.

Дополнительно были рассмотрены критерии самоподобия, предложенные З.Ж. Жанабаевым. Эти критерии, $I_0 = 0.465$, $I_1 = 0.567$ и $I_2 = 0.806$, являются параметрами для описания динамических систем. Неподвижная точка I_0 соответствующая предельному случаю масштабной инвариантности, описывает переход от хаотических процессов к фрактальной структурности.

Результаты подчеркивают важность использования фрактальных и информационно-энтропийных подходов для анализа гравитационных волн.

3. ИНФОРМАЦИОННО ЭНТРОПИЙНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Для обнаружения сигналов GW по экспериментальным данным коллаборации LIGO и Virgo используют метод согласованной фильтрации [296-298], который является одним из многих алгоритмов, разработанных для решения этой проблемы. Этот метод сравнивает набор данных предварительно рассчитанных эталонных сигналов с измеренными данными. Каждый шаблон представляет источник с различными компонентами как масса, спин и т. д. Для каждого эталонного сигнала вычисляется временной ряд отношения сигнал/шум (SNR), задавая уровень шума различными методами. Кандидаты в GW определяются в соответствии с пиком временного ряда SNR.

Метод согласованной фильтрации использует полный поиск в банке шаблонов, что в свою очередь может замедлить скорость обработки данных [299]. Кроме того, широкое разнообразие деталей GW требует все новых видов шаблонов.

В настоящее время теоретико-информационные подходы нашли широкое применение в современных задачах обработки сигналов. Наряду с методом согласованной фильтрации, информационно-энтропийный метод может быть использован для обнаружения сигналов GW по приборным данным. Информационная энтропия количественно определяет меру неопределенности, сложности сигнала. В работах [300-302] информационная энтропия успешно применена для распознавания сигналов с переменной амплитудой, фазой, частотой, уровнем шума. Мы предлагаем новый информационно-энтропийный метод анализа гравитационно-волновых данных. Новизна метода заключается в использовании условной информации, определяемой как разность совместной и условной энтропий. Этот метод не требует построения теоретического банка шаблонов сигналов.

3.1 Условная информация, определенная через разность энтропий.

Рассмотрим дискретные временные ряды сигналов X={$x[n]$}, Y={$y[n]$} заданные через отсчеты с номерами n, которые имеют статистическую связь, образуя некоторый ансамбль (X,Y). Примем, что X – принятый сигнал, Y ={$\Delta x[n]$}– помехи сигнала. Под помехой мы понимаем импульсные, хаотические, шумовые возмущения сигнала $\Delta x[n]$, вызванные нелинейными искажениями самого сигнала и внешними воздействиями.

Примем обозначения сигнала $x[n]$, n=1,2,3.. – номера отсчетов, $y[n]$=$\Delta x[n]$ - отклонения от $x[n]$, вызванного помехами. Интервал отклонения определяется через центральную (симметричную) разность $\Delta x[n] = (x[n+1] + x[n-1])/2 - x[n]$. Использование этого вида $\Delta x[n]$ вместо, например, односторонней разности $x[n+1] - x[n]$ позволяет учесть вторую производную X, т.е. форму сигнала. Вторая производная любой нелинейной функции отлична от нуля за исключением ее нулевого значения в точке перегиба. Вблизи точки перегиба функция меняется импульсно, что дает основание использовать центральную

разность для обнаружения GW в виде нелинейных всплесков возмущений сигнала. В самой точке перегиба искомая информация будет минимальной.

Обычно используемая взаимная информация $I(Y;X)$,переданная по каналу связи X определяется разностью одномерной и условной энтропий Шеннона $H(Y), H(Y|X)$:

$$I(Y;X) = H(Y) - H(Y|X), \tag{3.1}$$

где

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x[i],y[j])\, log_2\, p\,(y[j]), \tag{3.2}$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x[i],y[j])\, log_2\, p\,(y[j]|x[i]), \tag{3.3}$$

$$p(y[j]|x[i]) = p(x[i],y[j]) \,/\, p(x[i]). \tag{3.4}$$

Величины $p(x[i],y[j])$,$p(y[j])$, $p(y[j]|x[i])$– совместная, одномерная, условная вероятности попадания точек фазового пространства *(X*;*Y*) в квадраты с относительным размером δ<<1. В формуле (2) равная 1 сумма по *i* оставлена для удобства дальнейшего анализа. Из формул (1)-(4) следует:

$$I(Y;X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x[i],y[j])\, log_2 \frac{p(x[i],y[j])}{p(x[i])p(y[j])}. \tag{3.5}$$

При отсутствии взаимной корреляции между $x[i], y[j]$ имеет место $p(x[i],y[j])$ $=p(x[i])\, p(y[j])$, следовательно, $I(Y;X)=0$. Из структуры формулы (5) видно, что взаимная информация симметрична относительно перестановки переменных $X \rightleftarrows Y$: $I(Y;X) = I(X;Y)$, роли сигнала (X) и помех (Y)не различаются. По этим причинам для поставленной цели (X, Y должны быть различные переменные по смыслу) необходимо пользоваться другой мерой определенности – условной информацией, которую определим через разность энтропий

$$I(Y|X) = H(X,Y) - H(Y|X) \tag{3.6}$$

В формуле (6) $H(X,Y)-$ совместная энтропия ансамбля:

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x[i],\ y[j]) log_2 p(x[i],y[j]) \tag{3.7}$$

В отличие от взаимной информации условная информация несимметрична относительно перестановки переменных $X \rightleftarrows Y$ так как $H(Y|X) \neq H(Y|X)$.

Поделив почленно формулу (3.6) на (3.7) получим своеобразный известный закон сохранения для нормированных значений условных информации и энтропии.

$$\tilde{I}(Y|X) + \widetilde{H}(Y|X) = 1, \widetilde{H}(Y|X) = H(Y|X)/H(X,Y)\widetilde{I}(Y|X) = \tilde{I}(Y|X)/H(X,Y) \quad (3.8)$$

Связь между информацией и энтропией в виде формулы (3.8) известна для энтропии Больцмана для равновесного состояния, или в случае выбора Y в виде постоянных параметров. Мы выбираем условие Y в виде характерных признаков искомого сигнала, определяемых из смеси с шумом.

Из формулы (3.8) следует для разности условных информаций

$$\Delta\tilde{I} = \tilde{I}(Y|X) - \tilde{I}(X|Y) = \widetilde{H}(X|Y) - \widetilde{H}(Y|X). \quad (3.9)$$

При перестановке переменных $X \rightleftarrows Y$ условные информации и энтропии приобретают различные смыслы. Например, $\tilde{I}(Y|X)$ определяет информацию о всплеске нелинейных возмущений Y (о наличии GW) в известном шумовом сигнале X. Соответствующее уменьшение энтропии описывает $H\big(Y(X)\big) - H(Y|X)$. Уменьшению информации соответствует рост энтропии $\widetilde{H}(X|Y)$. Если $\Delta\tilde{I} > 0$, то сигнал обнаруживается, при $\Delta\tilde{I} < 0$ сигнала нет. Этот критерий может иметь положительные значения и в случаях с переставленными переменными (X, Y). Эти случаи соответствуют резкому спаду Y вблизи точки перегиба. Использование $\Delta\tilde{I}$ повышает надежность анализа сигнала.

Пусть вычисляемая переменная Y имеет систематическую погрешность $\Delta Y(Y = Y[0] + \Delta Y)$. Ограничиваясь первым членом разложения в ряд Тейлора через конечные разности в точке $Y[0]$ функцию $\Delta\tilde{I}$ имеем

$$\Delta\tilde{I} = \Delta\tilde{I}(Y[0]) + \frac{\Delta(\Delta I)}{\Delta Y}\Big|_{Y=Y[0]}^{\Delta Y} \quad (3.10)$$

При вычислении производной в (3.10) через конечные разности ΔY выпадает. Для слабых сигналов с отношением сигнал/шум порядка единицы малое приращение от $\Delta\tilde{I}$ может не проявляться как сигнал. Таким образом, слабый сигнал с систематической погрешностью ΔY отдельных слагаемых в (3.9) при вычислении $\Delta\tilde{I}$ может отсутствовать.

3.2 Алгоритм определения разности условной информации

3.2.1 Генерация данных

С целью тестирования нашего метода воспользуемся пакетом PyCBC для генерации сигналов GW. Параметры модельных сигналов выбраны согласно статье [296] где тоже проведено тестирование своего алгоритма. Сигнал GW определяется массами компонентов m1, m2, случайно выбранными в диапазоне от 10 до 50M⊙, и фазами в диапазоне φ_0 от 0 до 2pi. В соответствии с выбранным целевым SNR определяются амплитуда и расстояние до источника.

Мы предполагаем наличие одного детектора LIGO Hanford , параметры наклона и поляризации которого равны 0, так как любое изменение этих параметров может быть полностью эквивалентно изменениями амплитуды и фазы сигнала. Сигналы отбеливаются путем деления преобразованного Фурье

сигнала на квадратный корень из спектральной плотности мощности (PSD) для уменьшения мощности на частотах, превышающих пределы чувствительности детектора. Моделирование шума (включая цветной шум) и его отбеливание также выполняются с использованием того же PSD. Смоделированные сигналы случайным образом размещаются во временном ряду длительностью 32(-16:16) с. с условием, что пиковая амплитуда каждого сигнала случайным образом располагается в интервале 0,75 ÷ 0,95 этого временного ряда. После этого для достижения оптимального значения (SNR) производится масштабирование амплитуды сигнала. Оптимальное SNR (ρ_opt) может быть определено встроенной функцией:

$$\rho_{opt}^2 = 4Re\left[\int df \frac{\tilde{h}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)}\right], \tag{3.11}$$

где $\tilde{h}$ – представление деформации GW в частотной области, $\tilde{h}^*$– его сопряжение, S_n– PSD, а Re извлекает действительную часть комплексного числа. Набор данных до 10^5 был сгенерирован для каждого заданного оптимального значения SNR в диапазоне от 2 до 10 с целыми шагами.

3.2.2 Реализация алгоритма определения разности условных информаций.

Из дискретного сигнала GW вычисляется Δx по формуле:

$$\Delta x[n] = \frac{x[n+1]+x[n-1]}{2} - x[n] \tag{3.12}$$

С помощью известного алгоритма скользящего окна мы разделяем заданный дискретный временной ряд $x[n]$ и $\Delta x[n]$ на окна длиной в L точек. Если принять, что параметр временной задержки окна анализа равен 1, то последовательность сигналов $X[n]$ можно разбить на сегменты с номером $N - L$, которые образуют следующие матрицы от $x[n] \to X$ и $\Delta x[n] \to \Delta X$.

$$X = \begin{vmatrix} x[1], & x[2], \dots & x[L] \\ x[2], & x[3], \dots & x[L+1] \\ x[N-L], & \dots, & x[N] \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta X = \begin{vmatrix} \Delta x[1], & \Delta x[2], \dots, & \Delta x[L] \\ \Delta x[2], & \Delta x[3], \dots, & \Delta x[L+1] \\ \Delta x[N-L], & \dots, & \Delta x[N] \end{vmatrix}$$

Для определения разности условных информаций строится плоскость (X[n] и ΔX [n]) и разбивается на ячейки (i x j). Далее определяется вероятность каждой ячейки и получается матрица вероятностей P_{ij}. Из матрицы вероятностей определяем разность условных информаций по формуле (3.9). Для определения

разности условных информаций для каждой строки матриц X [n] и ΔX [n] используется следующий алгоритм:

Algorithm

Input X,ΔX;
задаем размер матрицы ni, nj
hi=(max(X)-min(X))/ni определяем размер ячейки
hj=(max(ΔX)-min(ΔX))/nj
P=zeros(ni,nj) нулевая матрица
for k in range(N): цикл для расчета матрицы вероятностей
i=int((X[k]-min(X)/hi)
j=int((ΔX [k]-min(ΔX)/hj)
P[i,j]=(P[i,j]+1)/N
Имея матрицу вероятностей P[i,j] находим $\Delta\tilde{I}$ по формуле (9)
Output $\Delta\tilde{I}$

3.3 Результаты численного анализа сигналов гравитационных волн

В нашем методе при обнаружении сигнала GW разница условных информаций ΔI увеличивается, а шум колеблется около нуля. Для определения размера окна и порогового значения $\Delta\tilde{I}$ вычисляем коэффициент ложных срабатываний (FPR) (Рисунок 3.1). FPR – одна из важных стандартных метрик, которая используется для оценки обнаружения GW. FPR можно определить следующим образом [297]:

$$FPR = \frac{FP}{FP+TN}, \tag{3.13}$$

где FP – количество ложноположительных предсказаний, TN – количество истинно отрицательных.

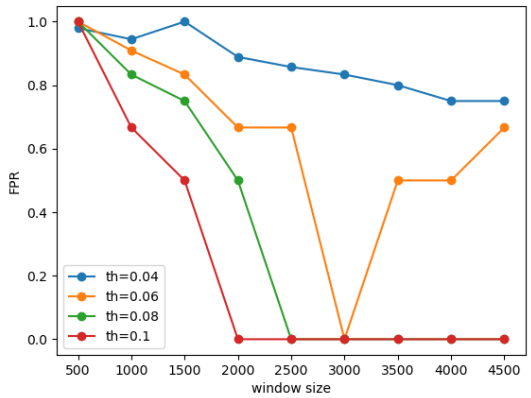


Рисунок 3.1 - Зависимость FPR от размера окна, где пороговое значение(th) изменяется в диапазоне от 0,04 до 0,1 с шагом 0.02, SNR =10

Согласно рисунку 1, при размере окна M>2000 и пороговом значении th>0.1 сигнал детектируется без ошибок. Из набора данных, состоящего из 10 000 сигналов при каждом SNR, с помощью нашего метода было рассчитано количество обнаруженных сигналов. Далее для расчета эффективности (Рисунок3.2) выбираем размер окна 3000 и пороговое значение 0,1 для точности проверки. Тогда эффективность определяется

$$efficiency = \frac{N_{\Delta I>t}}{N_s}, \tag{3.14}$$

где $N_{\Delta I>t}$ – количество обнаруженных сигналов, N_s – общее количество сигналов.

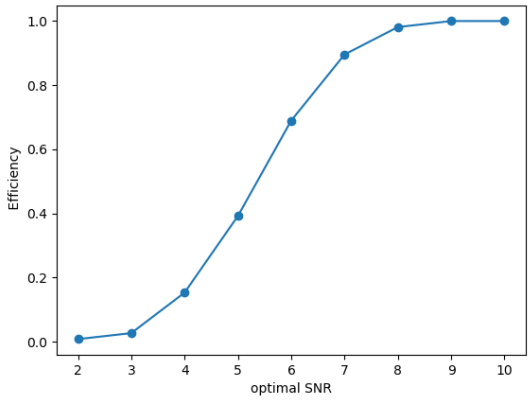


Рисунок 3.2 - Эффективность как функция оптимального SNR

Результаты на Рисунок 3.2 показывают, что эффективность увеличивается с оптимальным SNR и достигает 100 % при SNR 9.

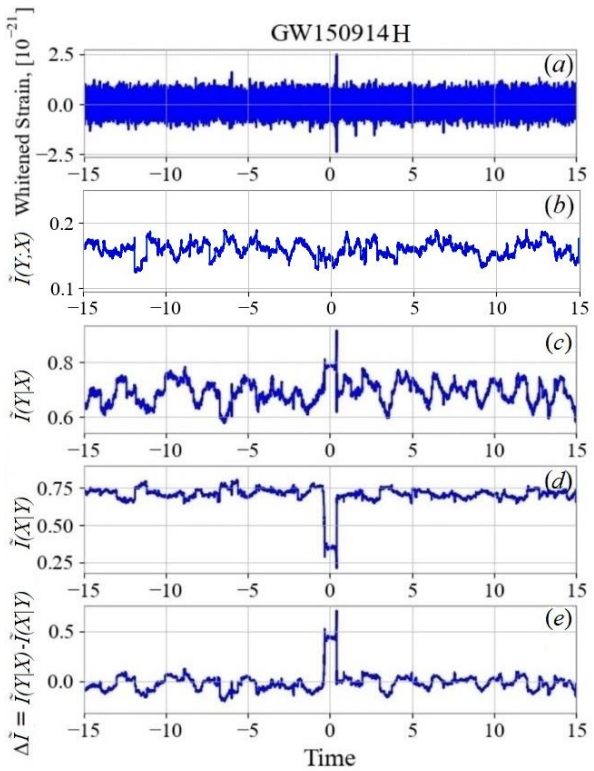


Рисунок 3.3 - Событие GW150914H: a – отбеленный сигнал GW, b –$\tilde{I}(Y;X)$ c – $\tilde{I}(Y|X)$, d – $\tilde{I}(X|Y)$ e-разность условных информаций $\Delta\tilde{I}$; размер окна L=3000

Чтобы продемонстрировать осуществимость нашего метода, мы провели анализ с использованием реальных данных LIGO. На Рисунок 3.3 (b, c, d, e) показаны значения $\tilde{I}(Y;X)$, $\tilde{I}(Y|X)$, $\tilde{I}(X|Y)$, $\Delta\tilde{I}$ для события GW150914, рассчитанное по формулам (1), (8), (9) соответственно.

Из Рисунок 3.3(b) видно, что значение взаимной информации $\tilde{I}(Y;X)$ колеблется около одного уровня и не меняется на всем интервале времени и составляет около 0,19 . При этом значение условной информации $\tilde{I}(Y|X)$ и разности условных информаций $\Delta\tilde{I}$ увеличились в момент обнаружения полезного сигнала примерно с 0,7 до 0,9 и с 0 до 0,6 соответственно. Что касается значения условной информации $\tilde{I}(X|Y)$, то оно уменьшилось в момент обнаружения гравитационной волны примерно с 0,75 до 0,25.

Правомерность использования информационно-энтропийного метода, предлагаемого нами, показана в таблице 3.1. Символы плюс (+) означают обнаружение сигнала с выделенными положительными значениями $\tilde{I}(Y|X), \tilde{I}(X|Y), \Delta\tilde{I}$. Символы минус (–) означают нулевое значение или отсутствие выделенного максимума или минимума разности условных информаций из-за отсутствия сигнала. Для источника GW151226H значение $\tilde{I}(Y|X)$ минимальное, сигнал обнаруживается при перестановке $Y|X \to X|Y$. Это означает что наш метод реагирует на асимметрию изменения сигнала по времени относительно момента всплеска GW.

Таблица 3.1. Результаты информационно-энтропийного анализа сигналов GW по данным детекторов Хэндфорд(H) и Ливингстон (L) . $M/M_{\odot}$ -суммарная масса черных дыр относительно массы Солнца, SNR- отношение сигнал/шум, R-расстояние до источника согласно работам [1-6].

Источник	$\tilde{I}(Y\|X)$	$\tilde{I}(X\|Y)$	$\Delta\tilde{I}$	SNR	$M/M_{\odot}$	R
GW150914H	+	+	+	18.54	62	410Mpc
GW150914L	+	+	+	13.25		
GW151226H		-	+ (при $Y\|X \to X\|Y$)	9.64	22	4292Mpc
GW151226L		-	-	7.22		
GW170104H	+	+	+	7.86	48.7	880Mpc
GW170104L	+	+	+	9.58		
GW170608H	+	+	+	8	18	340Mpc
GW170608L	-	-	-	8		
GW170814H	+	+	+	7.5	53	5518Mpc
GW170814L	+	+	+	14		
GW170817H	+	+	+	32	3.3	40Mpc
GW170817L	+	+	+	32*		

Сигналы GW151226, GW170608L имеют низкое отношение сигнал/шум и суммарные массы черных дыр относительно других сигналов (табл. 3.1).

3.4 Заключение раздела 3

Из приведенных выше результатов следует, что предложенный информационно-энтропийный метод демонстрирует хорошие возможности распознавания данных GW. Согласно полученным результатам, во всех шести событиях GW значения известной меры взаимной информации $\tilde{I}(Y;X)$ не меняются скачкообразно на всем интервале времени, а разность условных информаций $\Delta\tilde{I}$ резко возрастает в момент появления гравитационных волн. Введенная нами новая мера $\Delta\tilde{I}$– выявляет сигнал с необходимой достоверностью при SNR≥ 9, что было подтверждено также использованием стандартных методов тестирования алгоритмов обнаружения сигналов GW. Критерий $\Delta\tilde{I}$ указывает также возможную асиметрию изменения сигнала по времени относительно момента всплеска GW. Изложенный новый метод может служить дополнением к существующим методам анализа сигналов GW. Этот метод по сравнению с известным методом согласованной фильтрации может обнаруживать сигналы за пределами существующих шаблонов.

Мы считаем, что вариации этого метода, несомненно, могут быть применены к поиску сложных сигналов различной природы без использования банка шаблонов.

4 КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Развитие методов классификации гравитационных волн стало ключевым направлением в современной астрофизике, позволяя не только эффективно анализировать наблюдаемые сигналы, но и выделять их среди шумов различной природы. В условиях растущих темпов обнаружения гравитационных волн возникла острая необходимость в создании более эффективных алгоритмов классификации и обнаружения, способных преодолеть ограничения традиционных методов. Эти методы, основанные на сопоставлении фильтров (matched-filtering), требуют использования заранее рассчитанных шаблонов форм сигналов, что делает их ресурсоемкими и ограничивает возможность обработки расширенного параметрического пространства неизвестных характеристик источников. Кроме того, их зависимость от точности шаблонов вызывает опасения относительно пропуска сигналов, которые отклоняются от теоретически ожидаемых моделей [303].

Сложность задачи увеличивается при необходимости учета уникальных событий с такими факторами, как эксцентриситет, прецессия и модели высших порядков. Это делает невозможным покрытие всего диапазона параметров с использованием миллионов шаблонов, особенно в сценариях с участием нейтронных звёзд, где важна оперативность электромагнитного сопровождения наблюдений [304].

В ответ на эти вызовы значительное внимание стало уделяться подходам, основанным на глубоком обучении (Deep Learning, DL). Так, недавние исследования Р. Цю и соавторов продемонстрировали успешное применение DL для идентификации событий слияния гравитационных волн, включая две двойные нейтронные звезды (BNS) и два слияния нейтронной звезды с чёрной дырой (NSBH) [305]. Эти достижения показывают, как методы DL преодолевают ограничения традиционных алгоритмов, предоставляя мощные инструменты для анализа данных.

Применение DL, наряду с широким использованием методов машинного обучения, стало важным для решения различных задач. Например, оно применяется для изучения гравитационных волн от сверхновых [306], повышения эффективности и точности при оценке обнаруживаемости сигналов от слияний с экстремальным соотношением масс [307] и анализа данных гравитационных волн [302, 308–312]. Эти достижения подчеркивают растущую значимость глубокого обучения в современной астрофизике.

Особенно выделяются алгоритмы сверточных нейронных сетей (Convolutional Neural Networks, CNN), которые продемонстрировали высокий потенциал в обнаружении сигналов от слияний двойных чёрных дыр (BBH) на фоне гауссовского шума, зачастую превосходя по эффективности традиционные методы сопоставления фильтров [305]. Этот успех стал важным поворотным моментом, стимулируя многочисленные исследовательские группы использовать алгоритмы DL для анализа как смоделированных данных, так и реальных данных наблюдений LIGO.

Учитывая вычислительные сложности, с которыми сталкиваются современные методы сопоставления фильтров при обнаружении

гравитационных волн, как было упомянуто ранее, наше исследование предлагает использование условной информации в качестве нового признака для характеристики сигналов. Энтропия, являясь универсальным инструментом в обработке сигналов, предоставляет уникальный подход к описанию атрибутов сигналов, эффективно решая ограничения, присущие традиционным методам. Её применение широко распространено в различных областях, таких как обработка радарных сигналов для идентификации источников и классификации сигналов [313], а также в медицинской диагностике заболеваний на основе анализа электроэнцефалограмм (EEG) и электрокардиограмм (ECG) [314].

Включение анализа условной информации в методологию классификации гравитационных волн нацелено на повышение универсальности и эффективности алгоритмов обработки таких сигналов. Этот подход представляет собой значительный отход от доминирующих методов глубокого обучения, предлагая потенциально более эффективное решение задач, связанных с обработкой больших параметрических пространств и необходимостью оперативной идентификации событий, особенно в сценариях с участием нейтронных звёзд.

4.1. ДАННЫЕ И МЕТОДЫ

Для моделирования сигналов гравитационных волн (GW), возникающих при слияниях компактных двойных объектов (CBC), мы использовали библиотеку LIGO Algorithm Library Suite (LALSuite) [315]. Этот инструмент обеспечил нас средствами для генерации сигналов для систем, включающих двойные черные дыры (BBH), двойные нейтронные звезды (BNS) и системы нейтронная звезда-чёрная дыра (NSBH).

Мы применили специфические аппроксиманты временных сигналов: SEOBNRv4 для BBH, который моделирует фазы сближения, слияния и кольцевания сигнала [316]; TaylorF2 для BNS [317]; и IMRPhenomNSBH для NSBH [318]. Наш подход был адаптирован из широко используемой методологии [319] для удовлетворения наших потребностей.

Для создания сигналов BBH мы равномерно распределяли массы компонентов в диапазоне от 2 до 95 $M\odot$ с максимальным соотношением масс (m1/m2) равным 10. Для сигналов BNS массы компонентов выбирались равномерно в диапазоне от 1 до 2 $M\odot$. Для сигналов NSBH массы нейтронных звёзд выбирались равномерно в пределах от 1 до 2 $M\odot$, а массы чёрных дыр варьировались в диапазоне от 2 до 35 $M\odot$. Значения для z-компоненты спинов, прямого восхождения, склонения, поляризации, угла наклонения и угла фазы слияния выбирались случайным образом. Эти параметры определяют местоположение и ориентацию источника на небе, а также уровень отношения сигнал-шум (SNR).

Сигналы оцифровывались с частотой 4096 Гц в течение 4 секунд. Эта продолжительность была выбрана авторами [305], так как она доказала свою эффективность в обеспечении надёжного различения между разными классами CBC. Более того, этот временной интервал достаточен для точного

восстановления реальных сигналов GW, соответствующих всем конфигурациям CBC. Использование этих более коротких шаблонов значительно снижает требования к памяти во время обучения нейронной сети, что является ключевым фактором для эффективного управления вычислительными ресурсами.

Для моделирования реалистичных сигналов GW мы вводили их в гауссовский шум с помощью библиотеки PyCBC, использующей модель спектральной плотности мощности (PSD), специфичную для детекторов Advanced LIGO [320]. Гауссовский шум генерировался в соответствии с ожидаемыми характеристиками фонового шума для детекторов. Затем сигналы GW проецировались на детекторы и масштабировались перед введением в гауссовский шум с определённым уровнем SNR.

Реальные данные с детекторов, а также смоделированные сигналы подвергались процессу отбеливания для улучшения видимости сигнала на фоне шума. Отбеливание выполнялось с использованием PSD, рассчитанной непосредственно из необработанных данных о гравитационных волнах методом Уэлча [321]. Этот критически важный шаг обеспечивает перерасчёт шума на каждой частоте, делая сигнал более чётким.

Для дальнейшего улучшения процесса обучения и повышения его устойчивости к умеренным временным сдвигам сигнала мы случайным образом позиционировали пик каждой волны в пределах шаблона, а именно между 3,7 и 3,9 секундами. Такая случайность в расположении пиков улучшает способность модели справляться с временными сдвигами сигнала во время обучения [305]. Кроме того, мы корректировали амплитуду каждой вводимой волны для достижения определённого отношения сигнал-шум (SNR).

Мы сгенерировали 480 000 шаблонов для обучения, 16 000 шаблонов для проверки и 1 600 000 шаблонов для тестирования, при этом все наборы данных не пересекаются. Отношение сигнал-шум (SNR) равномерно распределялось в диапазоне от 0 до 20.

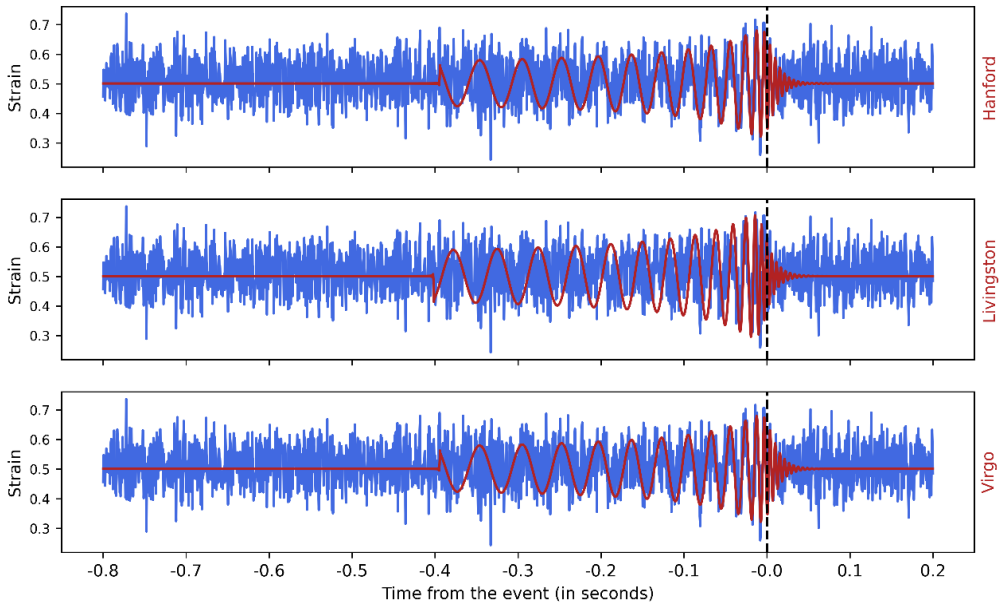


Рисунок 4.1 - Пример смоделированных гравитационных волн, спроецированных на детекторы H, L, V

Рисунок 4.2 демонстрирует, как CNN обрабатывает входной временной ряд, где сверточные фильтры скользят по данным, извлекая локальные закономерности и временные зависимости. Этот метод позволяет сети обучаться ключевым характеристикам данных. Слои пуллинга уменьшают размерность данных, а финальный слой softmax выдает вероятности для категорий BBH, BNS, NSBH или шум, обеспечивая точную классификацию.

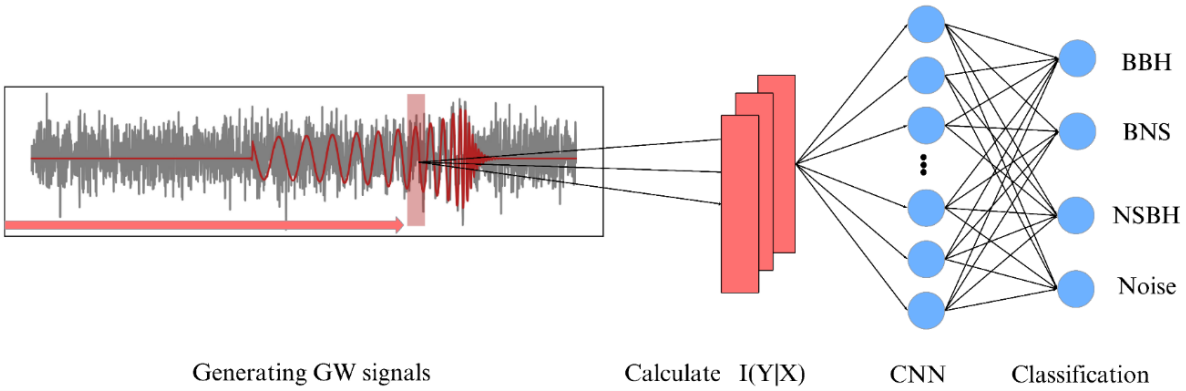


Рисунок 4.2 - Использование условной энтропии в качестве признака для классификации сигналов гравитационных волн. Красная стрелка иллюстрирует перемещение сверточных фильтров при их прохождении по входному вектору временного ряда. Финальный слой выдает вероятность того, что входной временной ряд классифицирован в одну из категорий: BBH, BNS, NSBH или шум

Наша архитектура CNN состоит из 7 сверточных блоков, за которыми следуют 2 полносвязных слоя, завершающихся функцией активации softmax на выходе. Каждый сверточный блок включает 1D-сверточный слой с функцией активации ReLU и слой максимального объединения (MaxPooling).

Параметры слоев Conv1D и MaxPooling1D заданы следующим образом: размер ядра для Conv1D – 3, размер пула для MaxPooling – 2, и одинаковое дополнение (same-padding) для обоих слоев. Сверточные слои настроены с количеством фильтров 128, 64, 32, 32, 32, 32 и 32 соответственно. Полносвязные слои включают 64 нейрона в скрытом слое и 4 нейрона в выходном слое.

Общая архитектура модели содержит 175 140 параметров. CNN была реализована и обучена с использованием TensorFlow 2.1. Для оптимизации использовался оптимизатор Adam с начальной скоростью обучения 0.001 и размером батча 256. В качестве функции потерь использовалась категориальная кросс-энтропия. Для регуляризации применялся метод EarlyStopping, который отслеживал точность на валидации с терпением в 10 эпох.

Обучение выполнялось на GPU NVIDIA GeForce RTX 3080 с 10 ГБ видеопамяти. Архитектура модели показана на Рисунок 4.3.

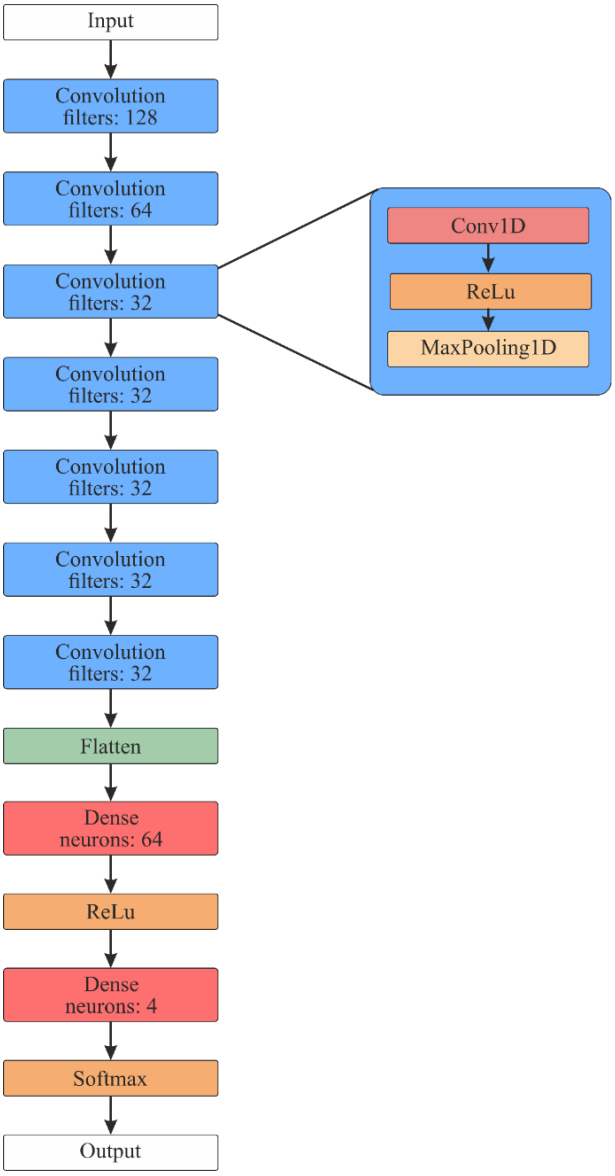
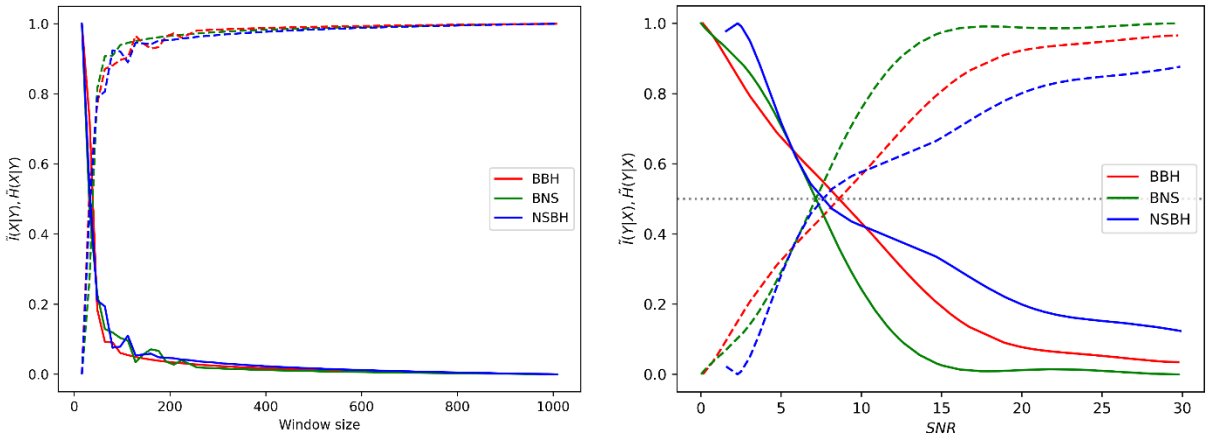


Рисунок 4.3 - Схематическая диаграмма архитектуры нейронной сети, показывающая, что все одномерные сверточные слои в пределах одного сверточного блока имеют различное количество фильтров. Общее количество параметров модели составляет 175 140

4.2. Результаты и обсуждение

Мы оцениваем производительность нашей модели с использованием тестового набора данных, состоящего из событий GW, описанных в подразделе 2.1. Эта оценка включает анализ эффективности нашего подхода в условиях влияния отношения сигнал/шум (SNR), точности сверточной нейронной сети (CNN) в процессе обучения, а также сравнение производительности обученной модели глубокого обучения (DL) до и после использования нашего подхода. Наконец, производительность модели тестируется на реальных событиях GW из каталога GWTC-3.



a *b*

Рисунок 4.4 - a) Условная информация (пунктирная линия) и условная энтропия (сплошная линия) для различных сигналов с увеличением отношения сигнал/шум (SNR). b) Условная информация (пунктирная линия) и условная энтропия (сплошная линия) для различных сигналов с различными размерами окна

Рисунок 4(a) иллюстрирует расчеты условной информации и энтропии для трех типов сигналов гравитационных волн: BBH, BNS и NSBH. Эти значения вычисляются с использованием Уравнений (4) и (5), при этом для расчетов используется пиковый интервал данных временного ряда. Затем мы применили метод Монте-Карло для усреднения условной информации и энтропии по всем смоделированным данным. Результаты демонстрируют отчетливые уровни условной информации и энтропии для каждого типа сигнала, что подчеркивает их потенциал в качестве признака для классификации.

Три кривые показывают, что с увеличением SNR вероятность обнаружения событий BBH и NSBH быстро возрастает, а затем стабилизируется, что указывает на то, что более высокие значения SNR не приводят к значительному увеличению вероятности обнаружения. Для событий BNS вероятность увеличивается более постепенно и продолжает расти с ростом SNR.

При низких значениях SNR события BNS имеют более высокую вероятность обнаружения по сравнению с BBH и NSBH, но с увеличением SNR вероятность для BBH и NSBH превышает вероятность для BNS. Это может указывать на то, что события BBH и NSBH генерируют более сильные сигналы при высоких значениях SNR, что делает их более легкими для обнаружения по сравнению с событиями BNS.

Рисунок 4(b) показывает изменение условной информации и энтропии в зависимости от различных размеров окна при значении SNR, равном 30. Рисунок демонстрирует, что данный признак остается стабильным в пределах определенного размера окна.

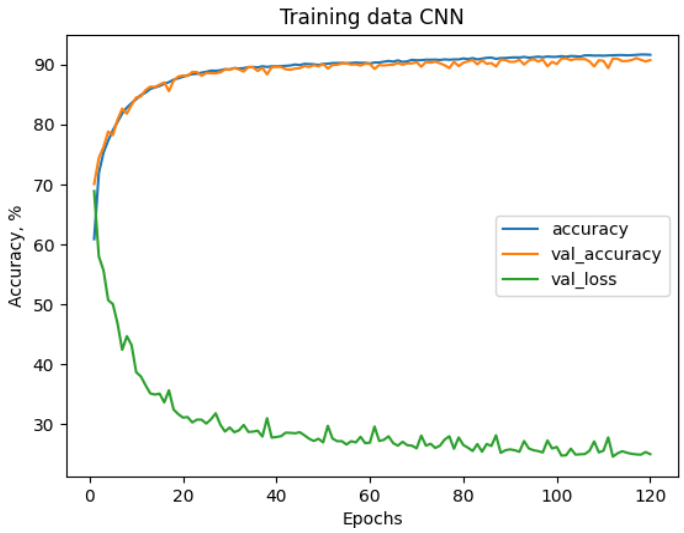


Рисунок 4.5 - Процесс обучения модели CNN

Производительность нашей модели CNN оценивалась на основе её способности корректно классифицировать смоделированные сигналы гравитационных волн (GW) по соответствующим категориям: BBH, BNS и NSBH. Рисунок 4.5 демонстрирует процесс обучения сверточной нейронной сети (CNN) в течение определённого числа эпох, каждая из которых представляет собой итерацию по всему набору данных. Как видно из графика, точность и точность на этапе валидации сходятся к высоким значениям, а валидационные потери уменьшаются. Это указывает на то, что модель эффективно обучается без переобучения, так как отсутствует значительный разрыв между точностью обучения и валидации.

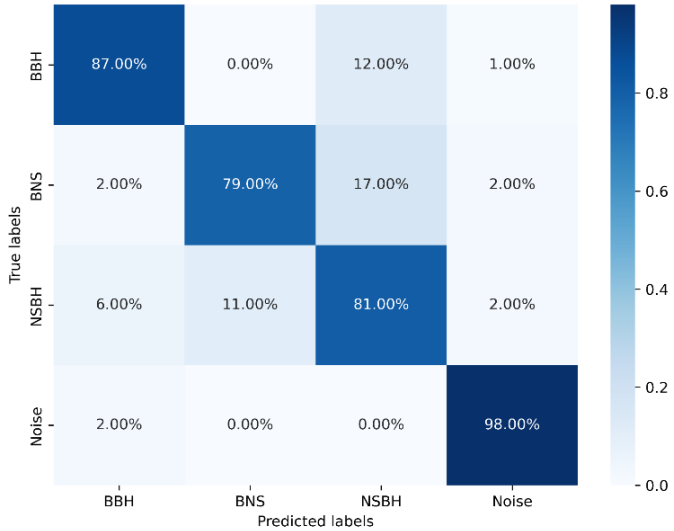


Рисунок 4.6 - Матрица ошибок для стандартного обучения на временных рядах

Для иллюстрации влияния включения условной информации в процесс обучения CNN представлены две матрицы ошибок. Рисунок 4.6 показывает матрицу ошибок до интеграции условной информации, тогда как Рисунок 4.7 демонстрирует результаты после её включения. Сравнение выявляет значительное улучшение точности классификации и производительности

модели, что подтверждает эффективность условной информации в повышении способности сети различать типы сигналов гравитационных волн.

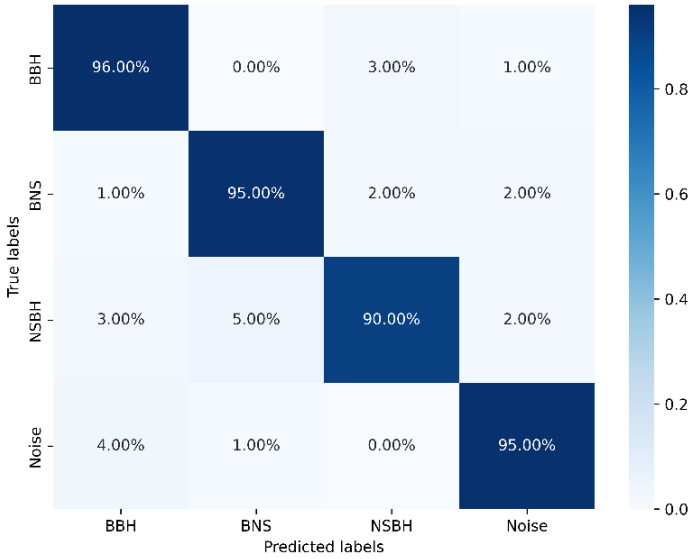


Рисунок 4.7 - Матрица ошибок, использующая условную энтропию в качестве признака для обучения

После включения условной информации модель демонстрирует следующие **показатели производительности:**

- **BBH (Слияние двойных чёрных дыр):** Модель достигла высокой точности в 96% при правильной классификации событий BBH, с минимальным количеством ошибок.
- **BNS (Слияние двойных нейтронных звёзд):** Точность классификации для событий BNS также высока и составляет 95%.
- **NSBH (Слияние нейтронной звезды с чёрной дырой):** Точность слегка снижается до 90%, при этом 5% событий NSBH ошибочно классифицируются как BNS.
- **Шум:** Эта категория используется для классификации сигналов, которые не являются гравитационными волнами. Модель достигает высокой точности в 95% для правильной идентификации шума.

Анализ реальных событий гравитационных волн из каталога GWTC-3 включён для оценки эффективности предложенной методологии.

Таблица 4.1 Результаты классификации событий из каталога GWTC-3. Содержит результаты классификации этих событий, включая название события, массы объектов, обнаруженное значение SNR и тип слияния компактных объектов (CBC).

Event name	M_1	M_2	SNR	CBC type	Classified
GW150914	35.6	30.6	26.0	BBH	BBH (100%)
GW151012	23.2	13.6	10.0	BBH	BBH (92%)
GW151226	13.7	7.7	13.1	BBH	BBH (100%)
GW170104	30.8	20.0	13.8	BBH	BBH (100%)
GW170608	11.0	7.6	15.4	BBH	BBH (100%)
GW170817	1.46	1.27	33.0	BNS	BNS (100%)
GW190425	1.74	1.56	10.1	BNS	BNS (84%)
GW191219	31.1	1.17	9.1	NSBH	NSBH (76%)
GW200105	8.9	1.9	13.9	NSBH	NSBH (94%)
GW200115	5.7	1.5	11.6	NSBH	NSBH (70%)
GW200322_091133	38.0	11.3	4.5	BBH	Noise
GW200308_173609	60.0	24.0	4.7	BBH	Noise

4.3. Заключение раздела 4

Наше исследование продемонстрировало эффективность использования методов машинного обучения, в частности сверточных нейронных сетей (CNN) в сочетании с оценкой условной информации, для классификации сигналов гравитационных волн (GW), связанных со слиянием черных дыр и нейтронных звезд (BH-NS)[322, 323].

Мы предложили инновационную методологию, которая объединяет использование условной информации как признака в обработке сигналов с глубокими нейронными сетями для обнаружения гравитационных волн. Этот гибридный подход устраняет ограничения традиционных методов сопоставления фильтров, повышая точность обнаружения и классификации сигналов GW.

Для обучения и валидации модели был создан обширный набор данных смоделированных сигналов гравитационных волн с использованием библиотеки LIGO Algorithm Library Suite. Этот набор данных, включающий формы волн для систем слияний двойных черных дыр (BBH), двойных нейтронных звезд (BNS) и систем нейтронная звезда – черная дыра (NSBH), сыграл ключевую роль в обеспечении надежности и применимости нашей модели в реальных условиях.

Модель CNN продемонстрировала высокую точность классификации смоделированных сигналов GW по их категориям, что свидетельствует о ее способности эффективно различать различные типы сигналов GW, несмотря на связанные с этим сложности.

Проверка на реальных данных GW из каталога GWTC-3 дополнительно подтвердила практическую применимость нашего подхода. Модель показала впечатляющую точность при классификации реальных событий GW, что подчеркивает потенциал предложенной методологии для поддержки текущих и будущих наблюдательных кампаний.

Перспективные результаты нашего исследования открывают новые возможности для дальнейших разработок в этой области. С ожидаемым улучшением детекторов гравитационных волн и развитием алгоритмов машинного обучения наше исследование закладывает основу для создания более совершенных методов обнаружения, которые могут значительно расширить наше понимание астрофизических явлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были получены важные результаты, которые раскрывают новые аспекты природы гравитационных волн и их обнаружения.

1. Выявлено, что аттрактор слабых гравитационных волн обладает фрактальной размерностью с дробной частью 0.465. Это значение связано с параметром Хаббла, что указывает на масштабно-инвариантные свойства гравитационно-волновых сигналов и их роль в изучении космических структур.
2. Разработан новый метод обнаружения гравитационных волн, основанный на анализе условной информации разности энтропии фазового пространства и условной энтропии. Этот подход позволяет эффективно регистрировать гравитационно-волновые сигналы даже при низком уровне отношения сигнал/шум (SNR).
3. Предложена классификация источников гравитационных волн, таких как двойные слияния черных дыр и нейтронных звезд, с использованием условной информации разности энтропий. Данный подход обеспечивает высокую точность идентификации сигналов, даже в условиях низкого уровня SNR, и открывает новые перспективы для анализа гравитационно-волновых событий.

Эти результаты подчеркивают фундаментальную связь гравитационно-волновых сигналов с фрактальными и энтропийными характеристиками, а также их значимость для дальнейшего развития методов обнаружения и классификации источников гравитационных волн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bailes M. et al. Gravitational-wave physics and astronomy in the 2020s and 2030s //Nature Reviews Physics. – 2021. – Т. 3. – №. 5. – С. 344-366.
2. Abbott B. P. et al. Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA //Living reviews in relativity. – 2020. – Т. 23. – С. 1-69.
3. Blanchet L. Post-Newtonian theory for gravitational waves //Living Reviews in Relativity. – 2024. – Т. 27. – №. 1. – С. 4.
4. Aggarwal N. et al. Challenges and opportunities of gravitational-wave searches at MHz to GHz frequencies //Living reviews in relativity. – 2021. – Т. 24. – С. 1-74.
5. Charles W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. 1280 p. ISBN 978-0-7167-0344-0, 978-0-691-17779-3.
6. Michele Maggiore. Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments. Oxford: Oxford University Press, 2007. 572 p. ISBN 978-0-19-171766-6, 978-0-19-852074-0. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.
7. B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Physical Review Letters, 2016, vol. 116, no. 6, p. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
8. R. A. Hulse, J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. Astrophysical Journal Letters, 1975, vol. 195, p. L51–L53. DOI: 10.1086/181708.
9. Belczynski K., Kalogera V., Bulik T. A Comprehensive Study of Binary Compact Objects as Gravitational Wave Sources: Evolutionary Channels, Rates, and Physical Properties. Astrophysical Journal, 2001, vol. 572, pp. 407–431. DOI: 10.1086/340304.
10. Tohline J. E. The Origin of Binary Stars. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 2002, vol. 40, pp. 349–385. DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093810.
11. Will C. M. The Confrontation Between General Relativity and Experiment. Living Reviews in Relativity, 2014, vol. 17, p. 4. DOI: 10.12942/lrr-2014-4.
12. Alexander S., Yunes N. Chern-Simons Modified General Relativity. Physics Reports, 2009, vol. 480, pp. 1–55. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.07.002.
13. Famaey B., McGaugh S. Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions. Living Reviews in Relativity, 2012, vol. 15, p. 10. DOI: 10.12942/lrr-2012-10.
14. Shankaranarayanan S., Johnson J. P. Modified Theories of Gravity: Why, How, and What? General Relativity and Gravitation, 2022, vol. 54, no. 5, p. 44. DOI: 10.1007/s10714-022-02927-2.
15. De Felice A., Tsujikawa S. f(R) Theories. Living Reviews in Relativity, 2010, vol. 13, p. 3. DOI: 10.12942/lrr-2010-3.
16. De Rham C. Massive Gravity. Living Reviews in Relativity, 2014, vol. 17, p. 7. DOI: 10.12942/lrr-2014-7.

17. Mirshekari S., Yunes N., Will C. M. Constraining Generic Lorentz Violation and the Speed of the Graviton with Gravitational Waves. Physical Review D, 2012, vol. 85, p. 024041. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.024041.

18. Okounkova M., Farr W. M., Isi M., Stein L. C. Constraining Gravitational Wave Amplitude Birefringence and Chern-Simons Gravity with GWTC-2. Physical Review D, 2022, vol. 106, no. 4, p. 044067. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.044067.

19. Belgacem E., Dirian Y., Foffa S., Maggiore M. Gravitational-Wave Luminosity Distance in Modified Gravity Theories. Physical Review D, 2018, vol. 97, no. 10, p. 104066. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.104066.

20. Nishizawa A. Generalized Framework for Testing Gravity with Gravitational-Wave Propagation. I. Formulation. Physical Review D, 2018, vol. 97, no. 10, p. 104037. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.104037.

21. Eardley D. M., Lee D. L., Lightman A. P., Wagoner R. V., Will C. M. Gravitational-Wave Observations as a Tool for Testing Relativistic Gravity. Physical Review Letters, 1973, vol. 30, pp. 884–886. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.884.

22. Coley A., Milson R., Pravda V., Pravdova A. Classification of the Weyl Tensor in Higher Dimensions. Classical and Quantum Gravity, 2004, vol. 21, pp. L35–L42. DOI: 10.1088/0264-9381/21/7/L01.

23. Landau L. D., Lifschits E. M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, Oxford, 1975. ISBN 978-0-08-018176-9.

24. Nishizawa A., Taruya A., Hayama K., Kawamura S., Sakagami M. Probing Non-Tensorial Polarizations of Stochastic Gravitational-Wave Backgrounds with Ground-Based Laser Interferometers. Physical Review D, 2009, vol. 79, p. 082002. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.082002.

25. Abbott R. et al. Tests of General Relativity with GWTC-3. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2112.06861.

26. Hurley J. R., Tout C. A., Pols O. R. Evolution of Binary Stars and the Effect of Tides on Binary Populations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2002, vol. 329, p. 897. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x.

27. Dominik M., Belczynski K., Fryer C., Holz D., Berti E., Bulik T., Mandel I., O'Shaughnessy R. Double Compact Objects I: The Significance of the Common Envelope on Merger Rates. Astrophysical Journal, 2012, vol. 759, p. 52. DOI: 10.1088/0004-637X/759/1/52.

28. Tauris T. M. et al. Formation of Double Neutron Star Systems. Astrophysical Journal, 2017, vol. 846, no. 2, p. 170. DOI: 10.3847/1538-4357/aa7e89.

29. Rodriguez C. L., Amaro-Seoane P., Chatterjee S., Kremer K., Rasio F. A., Samsing J., Ye C. S., Zevin M. Post-Newtonian Dynamics in Dense Star Clusters: Formation, Masses, and Merger Rates of Highly-Eccentric Black Hole Binaries. Physical Review D, 2018, vol. 98, no. 12, p. 123005. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.123005.

30. Tagawa H., Haiman Z., Kocsis B. Formation and Evolution of Compact Object Binaries in AGN Disks. Astrophysical Journal, 2020, vol. 898, no. 1, p. 25. DOI: 10.3847/1538-4357/ab9b8c.

31. Samsing J., MacLeod M., Ramirez-Ruiz E. The Formation of Eccentric Compact Binary Inspirals and the Role of Gravitational Wave Emission in Binary-

Single Stellar Encounters. Astrophysical Journal, 2014, vol. 784, p. 71. DOI: 10.1088/0004-637X/784/1/71.

32. Kovacs S. J., Thorne K. S. The Generation of Gravitational Waves. 4. Bremsstrahlung. Astrophysical Journal, 1978, vol. 224, pp. 62–85. DOI: 10.1086/156350.

33. García-Bellido J., Nesseris S. Gravitational Wave Energy Emission and Detection Rates of Primordial Black Hole Hyperbolic Encounters. Physics of the Dark Universe, 2018, vol. 21, pp. 61–69. DOI: 10.1016/j.dark.2018.06.001.

34. Carr B., Kuhnel F., Sandstad M. Primordial Black Holes as Dark Matter. Physical Review D, 2016, vol. 94, no. 8, p. 083504. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.083504.

35. Escrivà A., Kuhnel F., Tada Y. Primordial Black Holes. 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2211.05767.

36. Ali-Haïmoud Y., Kovetz E. D., Kamionkowski M. Merger Rate of Primordial Black-Hole Binaries. Physical Review D, 2017, vol. 96, no. 12, p. 123523. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.123523.

37. Liebling S. L., Palenzuela C. Dynamical Boson Stars. Living Reviews in Relativity, 2023, vol. 26, no. 1, p. 1. DOI: 10.1007/s41114-023-00043-4.

38. Liddle A. R., Madsen M. S. The Structure and Formation of Boson Stars. International Journal of Modern Physics D, 1992, vol. 1, pp. 101–144. DOI: 10.1142/S0218271892000057.

39. Chen J., Du X., Lentz E. W., Marsh D. J. E., Niemeyer J. C. New Insights into the Formation and Growth of Boson Stars in Dark Matter Halos. Physical Review D, 2021, vol. 104, no. 8, p. 083022. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.083022.

40. Begelman M. C., Blandford R. D., Rees M. J. Massive Black Hole Binaries in Active Galactic Nuclei. Nature, 1980, vol. 287, pp. 307–309. DOI: 10.1038/287307a0.

41. Klein A. et al. Science with the Space-Based Interferometer eLISA: Supermassive Black Hole Binaries. Physical Review D, 2016, vol. 93, no. 2, p. 024003. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.024003.

42. Sigurdsson S., Rees M. J. Capture of Stellar Mass Compact Objects by Massive Black Holes in Galactic Cusps. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1997, vol. 284, p. 318. DOI: 10.1093/mnras/284.2.318.

43. Amaro-Seoane P., Gair J. R., Freitag M., Miller M. C., Mandel I., Cutler C. J., Babak S. Astrophysics, Detection and Science Applications of Intermediate- and Extreme Mass-Ratio Inspirals. Classical and Quantum Gravity, 2007, vol. 24, pp. R113–R169. DOI: 10.1088/0264-9381/24/17/R01.

44. Kokkotas K. D., Schmidt B. G. Quasinormal Modes of Stars and Black Holes. Living Reviews in Relativity, 1999, vol. 2, p. 2. DOI: 10.12942/lrr-1999-2.

45. Spergel D. N. et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. Astrophysical Journal Supplement, 2003, vol. 148, pp. 175–194. DOI: 10.1086/377226.

46. Smith R., Thrane E. Optimal Search for an Astrophysical Gravitational-Wave Background. Physical Review X, 2018, vol. 8, no. 2, p. 021019. DOI: 10.1103/PhysRevX.8.021019.

47. Drasco S., Flanagan E. E. Detection Methods for Non-Gaussian Gravitational Wave Stochastic Backgrounds. Physical Review D, 2003, vol. 67, p. 082003. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.082003.

48. Metzger B. D. Kilonovae. Living Reviews in Relativity, 2020, vol. 23, no. 1, p. 1. DOI: 10.1007/s41114-019-0024-0.

49. Abbott B. P. et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. Astrophysical Journal Letters, 2017, vol. 848, no. 2, p. L12. DOI: 10.3847/2041-8213/aa91c9.

50. Graham M. J. et al. Candidate Electromagnetic Counterpart to the Binary Black Hole Merger Gravitational Wave Event S190521g. Physical Review Letters, 2020, vol. 124, no. 25, p. 251102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.251102.

51. Zhou C., Huang L., Guo K., Li Y.-P., Pan Z. Probing Orbits of Stellar Mass Objects Deep in Galactic Nuclei with Quasiperiodic Eruptions. Physical Review D, 2024, vol. 109, no. 10, p. 103031. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.103031.

52. Paschalidis V., Stergioulas N. Rotating Stars in Relativity. Living Reviews in Relativity, 2017, vol. 20, no. 1, p. 7. DOI: 10.1007/s41114-017-0008-x.

53. Haskell B., Jones D. I., Andersson N. Mountains on Neutron Stars: Accreted vs. Non-Accreted Crusts. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, vol. 373, pp. 1423–1439. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.10998.x.

54. Vigelius M., Melatos A. Resistive Relaxation of a Magnetically Confined Mountain on an Accreting Neutron Star. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2009, vol. 395, p. 1985. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.14698.x.

55. Gittins F. Gravitational Waves from Neutron-Star Mountains. Classical and Quantum Gravity, 2024, vol. 41, no. 4, p. 043001. DOI: 10.1088/1361-6382/ad1c35.

56. Abbott B. et al. Upper Limits on Gravitational Wave Emission from 78 Radio Pulsars. Physical Review D, 2007, vol. 76, p. 042001. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.042001.

57. Stairs I. H., Lyne A. G., Shemar S. L. Evidence for Free Precession in a Pulsar. Nature, 2000, vol. 406, pp. 484–486. DOI: 10.1038/35020010.

58. Owen B. J., Lindblom L., Cutler C., Schutz B. F., Vecchio A., Andersson N. Gravitational Waves from Hot Young Rapidly Rotating Neutron Stars. Physical Review D, 1998, vol. 58, p. 084020. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.084020.

59. New K. C. B. Gravitational Waves from Gravitational Collapse. Living Reviews in Relativity, 2003, vol. 6, p. 2. DOI: 10.12942/lrr-2003-2.

60. Sathyaprakash B. S., Schutz B. F. Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves. Living Reviews in Relativity, 2009, vol. 12, p. 2. DOI: 10.12942/lrr-2009-2.

61. Shibata M., Shapiro S. L. Collapse of a Rotating Supermassive Star to a Supermassive Black Hole: Fully Relativistic Simulations. Astrophysical Journal Letters, 2002, vol. 572, pp. L39–L44. DOI: 10.1086/341516.

62. Shibata M., Baumgarte T. W., Shapiro S. L. Stability and Collapse of Rapidly Rotating, Supramassive Neutron Stars: 3-D Simulations in General Relativity. Physical Review D, 2000, vol. 61, p. 044012. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.044012.

63. Rampp M., Janka H. T. Radiation Hydrodynamics with Neutrinos: Variable Eddington Factor Method for Core Collapse Supernova Simulations.

Astronomy and Astrophysics, 2002, vol. 396, p. 361. DOI: 10.1051/0004-6361:20021398.

64. Hjorth J. et al. A Very Energetic Supernova Associated with the Gamma-Ray Burst of 29 March 2003. Nature, 2003, vol. 423, pp. 847–850. DOI: 10.1038/nature01750.

65. Ott C. D. The Gravitational Wave Signature of Core-Collapse Supernovae. Classical and Quantum Gravity, 2009, vol. 26, p. 063001. DOI: 10.1088/0264-9381/26/6/063001.

66. Dimmelmeier H., Font J. A., Muller E. Relativistic Simulations of Rotational Core Collapse. 2. Collapse Dynamics and Gravitational Radiation. Astronomy and Astrophysics, 2002, vol. 393, pp. 523–542. DOI: 10.1051/0004-6361:20021053.

67. Dimmelmeier H., Ott C. D., Janka H.-T., Marek A., Mueller E. Generic Gravitational Wave Signals from the Collapse of Rotating Stellar Cores. Physical Review Letters, 2007, vol. 98, p. 251101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.251101.

68. Guth A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. Physical Review D, 1981, vol. 23, pp. 347–356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.

69. Allahverdi R., Brandenberger R., Cyr-Racine F.-Y., Mazumdar A. Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2010, vol. 60, pp. 27–51. DOI: 10.1146/annurev.nucl.012809.104511.

70. Turner M. S., Wilczek F. Relic Gravitational Waves and Extended Inflation. Physical Review Letters, 1990, vol. 65, pp. 3080–3083. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.3080.

71. Vilenkin A. Gravitational Radiation from Cosmic Strings. Physics Letters B, 1981, vol. 107, pp. 47–50. DOI: 10.1016/0370-2693(81)91144-8.

72. Abbott B. P. et al. Search for the Isotropic Stochastic Background Using Data from Advanced LIGO's Second Observing Run. Physical Review D, 2019, vol. 100, no. 6, p. 061101. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.061101.

73. Weber J. Detection and Generation of Gravitational Waves. Physical Review, 1960, vol. 117, pp. 306–313. DOI: 10.1103/PhysRev.117.306. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.306.

74. Weber J. Evidence for Discovery of Gravitational Radiation. Physical Review Letters, 1969, vol. 22, pp. 1320–1324. DOI: 10.1103/PhysRevLett.22.1320. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1320.

75. Drever R. W. P., Hough J., Bland R., Lessnoff G. W. Search for Short Bursts of Gravitational Radiation. Nature, 1973, vol. 246, no. 5432, pp. 340–344. DOI: 10.1038/246340a0.

76. Levine J. L., Garwin R. L. Absence of Gravity-Wave Signals in a Bar at 1695 Hz. Physical Review Letters, 1973, vol. 31, pp. 173–176. DOI: 10.1103/PhysRevLett.31.173. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.173.

77. Billing H., Kafka P., Maischberger K., Meyer F., Winkler W. Results of the Munich-Frascati Gravitational-Wave Experiment. Nuovo Cimento Lettere, 1975, vol. 12, pp. 111–116. DOI: 10.1007/BF02790471.

78. Hirakawa H., Narihara K. Search for Gravitational Radiation at 145 Hz. Physical Review Letters, 1975, vol. 35, pp. 330–334. DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.330. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.330.

79. Braginsky V. B., Manukin A. B., Popov E. I., Rudenko V. N. The Search for Gravitational Radiation of Non-Terrestrial Origin. Physics Letters A, 1973, vol. 45, no. 4, pp. 271–272. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(73)90074-1. Available at: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960173900741.

80. Gertsenshtein M. E., Pustovoit V. I. On the Detection of Low-Frequency Gravitational Waves. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1963, vol. 16, p. 433.

81. Luck H. The GEO-600 Project. Classical and Quantum Gravity, 1997, vol. 14, pp. 1471–1476. DOI: 10.1088/0264-9381/14/6/012.

82. Abbott B. et al. Joint LIGO and TAMA300 Search for Gravitational Waves from Inspiralling Neutron Star Binaries. Physical Review D, 2006, vol. 73, p. 102002. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.102002. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.102002.

83. Aasi J. et al. Improved Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from 2009–2010 LIGO and Virgo Data. Physical Review Letters, 2014, vol. 113, no. 23, p. 231101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.231101.

84. Agazie G. et al. The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-Wave Background. Astrophysical Journal Letters, 2023, vol. 951, no. 1, p. L8. DOI: 10.3847/2041-8213/acdac6.

85. Antoniadis J. et al. The Second Data Release from the European Pulsar Timing Array - III. Search for Gravitational Wave Signals. Astronomy and Astrophysics, 2023, vol. 678, p. A50. DOI: 10.1051/0004-6361/202346844.

86. Reardon D. J. et al. Search for an Isotropic Gravitational-Wave Background with the Parkes Pulsar Timing Array. Astrophysical Journal Letters, 2023, vol. 951, no. 1, p. L6. DOI: 10.3847/2041-8213/acdd02.

87. Xu H. et al. Searching for the Nano-Hertz Stochastic Gravitational Wave Background with the Chinese Pulsar Timing Array Data Release I. Research in Astronomy and Astrophysics, 2023, vol. 23, no. 7, p. 075024. DOI: 10.1088/1674-4527/acdfa5.

88. Aasi J. et al. Advanced LIGO. Classical and Quantum Gravity, 2015, vol. 32, p. 074001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/7/074001.

89. Cagnoli G. et al. Silica Suspension and Coating Developments for Advanced LIGO. Journal of Physics: Conference Series, 2006, vol. 32, pp. 386–392. DOI: 10.1088/1742-6596/32/1/059.

90. Carbone L. et al. Sensors and Actuators for the Advanced LIGO Mirror Suspensions. Classical and Quantum Gravity, 2012, vol. 29, p. 115005. DOI: 10.1088/0264-9381/29/11/115005.

91. Kwee P., Bogan C., Danzmann K., Frede M., Kim H., King P., Pöld J., Puncken O., Savage R. L., Seifert F., Wessels P., Winkelmann L., Willke B. Stabilized High-Power Laser System for the Gravitational Wave Detector Advanced LIGO. Optics Express, 2012, vol. 20, no. 10, pp. 10617–10634. DOI: 10.1364/OE.20.010617. Available at: https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-20-10-10617.

92. Abbott B. P. et al. LIGO: The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. Reports on Progress in Physics, 2009, vol. 72, p. 076901. DOI: 10.1088/0034-4885/72/7/076901.

93. Pinard L., Michel C., Sassolas B., Balzarini L., Degallaix J., Dolique V., Flaminio R., Forest D., Granata M., Lagrange B., Straniero N., Teillon J., Cagnoli G. Mirrors Used in the LIGO Interferometers for First Detection of Gravitational Waves. Applied Optics, 2017, vol. 56, no. 4, pp. C11–C15. DOI: 10.1364/AO.56.000C11. Available at: https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-56-4-C11.

94. Granata M. et al. Amorphous Optical Coatings of Present Gravitational-Wave Interferometers. Classical and Quantum Gravity, 2020, vol. 37, no. 9, p. 095004. DOI: 10.1088/1361-6382/ab77e9.

95. Edelstein W. A., Hough J., Pugh J. R., Martin W. LETTER TO THE EDITOR: Limits to the Measurement of Displacement in an Interferometric Gravitational Radiation Detector. Journal of Physics E: Scientific Instruments, 1978, vol. 11, no. 7, pp. 710–712. DOI: 10.1088/0022-3735/11/7/030.

96. Arain M. A., Mueller G. Design of the Advanced LIGO Recycling Cavities. Optics Express, 2008, vol. 16, no. 14, pp. 10018–10032. DOI: 10.1364/OE.16.010018. Available at: https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-16-14-10018.

97. Meers B. J. Recycling in Laser-Interferometric Gravitational-Wave Detectors. Physical Review D, 1988, vol. 38, pp. 2317–2326. DOI: 10.1103/PhysRevD.38.2317. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.38.2317.

98. Pitkin M., Reid S., Rowan S., Hough J. Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space). Living Reviews in Relativity, 2011, vol. 14, p. 5. DOI: 10.12942/lrr-2011-5.

99. Aasi J. et al. Enhancing the Sensitivity of the LIGO Gravitational Wave Detector by Using Squeezed States of Light. Nature Photonics, 2013, vol. 7, pp. 613–619. DOI: 10.1038/nphoton.2013.177.

100. Yu H. et al. Quantum Correlations between Light and the Kilogram-Mass Mirrors of LIGO. Nature, 2020, vol. 583, no. 7814, pp. 43–47. DOI: 10.1038/s41586-020-2420-8.

101. Tse M. et al. Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy. Physical Review Letters, 2019, vol. 123, no. 23, p. 231107. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.231107.

102. Acernese F. et al. Advanced Virgo: A Second-Generation Interferometric Gravitational Wave Detector. Classical and Quantum Gravity, 2015, vol. 32, no. 2, p. 024001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/2/024001.

103. Akutsu T. et al. KAGRA: 2.5 Generation Interferometric Gravitational Wave Detector. Nature Astronomy, 2019, vol. 3, no. 1, pp. 35–40. DOI: 10.1038/s41550-018-0658-y.

104. Whelan J. T. The Geometry of Gravitational Wave Detection. 2013. Available at: https://dcc.ligo.org/LIGO-T1300666/public.

105. Abbott B. P. et al. Calibration of the Advanced LIGO Detectors for the Discovery of the Binary Black-Hole Merger GW150914. Physical Review D, 2017, vol. 95, no. 6, p. 062003. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.062003.

106. Jaranowski P., Krolak A., Schutz B. F. Data Analysis of Gravitational-Wave Signals from Spinning Neutron Stars. 1. The Signal and its Detection. Physical Review D, 1998, vol. 58, p. 063001. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.063001.

107. Anderson W. G., Brady P. R., Creighton J. D. E., Flanagan E. E. An Excess Power Statistic for Detection of Burst Sources of Gravitational Radiation. Physical Review D, 2001, vol. 63, p. 042003. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.042003.

108. LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, KAGRA Collaboration. LVK Algorithm Library - LALSuite. Free Software (GPL), 2018.

109. Ashton G. et al. BILBY: A User-Friendly Bayesian Inference Library for Gravitational-Wave Astronomy. Astrophysical Journal Supplement, 2019, vol. 241, no. 2, p. 27. DOI: 10.3847/1538-4365/ab06fc.

110. Shaikh M. A., Varma V., Pfeiffer H. P., Ramos-Buades A., van de Meent M. Defining Eccentricity for Gravitational Wave Astronomy. Physical Review D, 2023, vol. 108, no. 10, p. 104007. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.104007.

111. Finn L. S. Detection, Measurement and Gravitational Radiation. Physical Review D, 1992, vol. 46, pp. 5236–5249. DOI: 10.1103/PhysRevD.46.5236.

112. Wen L., Chen Y. Geometrical Expression for the Angular Resolution of a Network of Gravitational-Wave Detectors. Physical Review D, 2010, vol. 81, p. 082001. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.082001.

113. Berger B. K., LIGO Scientific Collaboration. Tracking Down the Origins of Advanced LIGO Noise: Some Examples. In: APS April Meeting Abstracts, 2018, vol. 2018, APS Meeting Abstracts, p. S14.004.

114. Moore C. J., Cole R. H., Berry C. P. L. Gravitational-Wave Sensitivity Curves. Classical and Quantum Gravity, 2015, vol. 32, no. 1, p. 015014. DOI: 10.1088/0264-9381/32/1/015014.

115. Abbott B. P. et al. A Guide to LIGO–Virgo Detector Noise and Extraction of Transient Gravitational-Wave Signals. Classical and Quantum Gravity, 2020, vol. 37, no. 5, p. 055002. DOI: 10.1088/1361-6382/ab685e.

116. Abbott B. P. et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. Physical Review Letters, 2017, vol. 119, no. 16, p. 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.

117. Payne E., Hourihane S., Golomb J., Udall R., Udall D., Davis D., Chatziioannou K. Curious Case of GW200129: Interplay Between Spin-Precession Inference and Data-Quality Issues. Physical Review D, 2022, vol. 106, no. 10, p. 104017. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.104017.

118. Zevin M. et al. Gravity Spy: Integrating Advanced LIGO Detector Characterization, Machine Learning, and Citizen Science. Classical and Quantum Gravity, 2017, vol. 34, no. 6, p. 064003. DOI: 10.1088/1361-6382/aa5cea.

119. MacLeod D. M., Fairhurst S., Hughey B., Lundgren A. P., Pekowsky L., Rollins J., Smith J. R. Reducing the Effect of Seismic Noise in LIGO Searches by Targeted Veto Generation. Classical and Quantum Gravity, 2012, vol. 29, p. 055006. DOI: 10.1088/0264-9381/29/5/055006.

120. Soni S. et al. LIGO Detector Characterization in the First Half of the Fourth Observing Run. 2024.

121. Cabero M. et al. Blip Glitches in Advanced LIGO Data. Classical and Quantum Gravity, 2019, vol. 36, no. 15, p. 15. DOI: 10.1088/1361-6382/ab2e14.

122. George D., Shen H., Huerta E. A. Classification and Unsupervised Clustering of LIGO Data with Deep Transfer Learning. Physical Review D, 2018, vol. 97, no. 10, p. 101501. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.101501.

123. Soni S. et al. Discovering Features in Gravitational-Wave Data Through Detector Characterization, Citizen Science, and Machine Learning. Classical and Quantum Gravity, 2021, vol. 38, no. 19, p. 195016. DOI: 10.1088/1361-6382/ac1ccb.

124. Kittel C. Elementary Statistical Physics. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 2004. ISBN 9780486435145. Available at: https://books.google.co.uk/books?id=5sd9SAoRjgQC.

125. Abbott B. P. et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo During the First and Second Observing Runs. Physical Review X, 2019, vol. 9, no. 3, p. 031040. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.031040.

126. Abbott R. et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. Physical Review X, 2021, vol. 11, p. 021053. DOI: 10.1103/PhysRevX.11.021053.

127. Abbott R. et al. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. Physical Review D, 2024, vol. 109, no. 2, p. 022001. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.022001.

128. Abbott R. et al. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. Physical Review X, 2023, vol. 13, no. 4, p. 041039. DOI: 10.1103/PhysRevX.13.041039.

129. Abac A. G. et al. Observation of Gravitational Waves from the Coalescence of a 2.5–4.5 M⊙ Compact Object and a Neutron Star. 2024.

130. Takahashi R., TAMA Collaboration. Status of TAMA300. Classical and Quantum Gravity, 2004, vol. 21, no. 5, p. S403. DOI: 10.1088/0264-9381/21/5/004. Available at: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/5/004.

131. Dooley K. L. et al. GEO 600 and the GEO-HF Upgrade Program: Successes and Challenges. Classical and Quantum Gravity, 2016, vol. 33, p. 075009. DOI: 10.1088/0264-9381/33/7/075009.

132. Abbott R. et al. First Joint Observation by the Underground Gravitational-Wave Detector KAGRA with GEO 600. Progress of Theoretical and Experimental Physics (PTEP), 2022, no. 6, p. 063F01. DOI: 10.1093/ptep/ptac073.

133. Abbott B. P. et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. Astrophysical Journal Letters, 2017, vol. 848, no. 2, p. L13. DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c.

134. Albert A. et al. Search for High-Energy Neutrinos from Binary Neutron Star Merger GW170817 with ANTARES, IceCube, and the Pierre Auger Observatory. Astrophysical Journal Letters, 2017, vol. 850, no. 2, p. L35. DOI: 10.3847/2041-8213/aa9aed.

135. Abbott B. P. et al. GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. Physical Review Letters, 2018, vol. 121, no. 16, p. 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101.

136. Abbott B. P. et al. Properties of the Binary Neutron Star Merger GW170817. Physical Review X, 2019, vol. 9, no. 1, p. 011001. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.011001.

137. Abbott R. et al. GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of 150 M⊙. Physical Review Letters, 2020, vol. 125, no. 10, p. 101102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.101102.

138. Abbott R. et al. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object. Astrophysical Journal Letters, 2020, vol. 896, no. 2, p. L44. DOI: 10.3847/2041-8213/ab960f.

139. Hoy C., Mills C., Fairhurst S. Evidence for Subdominant Multipole Moments and Precession in Merging Black-Hole-Binaries from GWTC-2.1. Physical Review D, 2022, vol. 106, no. 2, p. 023019. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.023019.

140. Hannam M. et al. General-Relativistic Precession in a Black-Hole Binary. Nature, 2022, vol. 610, no. 7933, pp. 652–655. DOI: 10.1038/s41586-022-05212-z.

141. Romero-Shaw I. M., Lasky P. D., Thrane E., Bustillo J. C. GW190521: Orbital Eccentricity and Signatures of Dynamical Formation in a Binary Black Hole Merger Signal. Astrophysical Journal Letters, 2020, vol. 903, no. 1, p. L5. DOI: 10.3847/2041-8213/abbe26.

142. Gupte N. et al. Evidence for Eccentricity in the Population of Binary Black Holes Observed by LIGO-Virgo-KAGRA. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.14286.

143. Cotesta R., Carullo G., Berti E., Cardoso V. Analysis of Ringdown Overtones in GW150914. Physical Review Letters, 2022, vol. 129, no. 11, p. 111102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.111102.

144. Isi M., Farr W. M. Comment on “Analysis of Ringdown Overtones in GW150914”. Physical Review Letters, 2023, vol. 131, no. 16, p. 169001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.169001.

145. Carullo G., Cotesta R., Berti E., Cardoso V. Reply to Comment on “Analysis of Ringdown Overtones in GW150914”. Physical Review Letters, 2023, vol. 131, p. 169002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.169002.

146. Wang Y.-F., Capano C. D., Abedi J., Kastha S., Krishnan B., Nielsen A. B., Nitz A. H., Westerweck J. A Frequency-Domain Perspective on GW150914 Ringdown Overtone. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2310.19645.

147. Varma V., Biscoveanu S., Islam T., Shaik F. H., Haster C.-J., Isi M., Farr W. M., Field S. E., Vitale S. Evidence of Large Recoil Velocity from a Black Hole Merger Signal. Physical Review Letters, 2022, vol. 128, no. 19, p. 191102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.191102.

148. Abbott B. P. et al. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo. Astrophysical Journal Letters, 2019, vol. 882, no. 2, p. L24. DOI: 10.3847/2041-8213/ab3800.

149. Abbott R. et al. Population Properties of Compact Objects from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog. Astrophysical Journal Letters, 2021, vol. 913, no. 1, p. L7. DOI: 10.3847/2041-8213/abe949.

150. Abbott R. et al. Population of Merging Compact Binaries Inferred Using Gravitational Waves through GWTC-3. Physical Review X, 2023, vol. 13, no. 1, p. 011048. DOI: 10.1103/PhysRevX.13.011048.

151. Abbott B. P. et al. A Gravitational-Wave Standard Siren Measurement of the Hubble Constant. Nature, 2017, vol. 551, no. 7678, pp. 85–88. DOI: 10.1038/nature24471.

152. Abbott R. et al. Constraints on the Cosmic Expansion History from GWTC–3. Astrophysical Journal, 2023, vol. 949, no. 2, p. 76. DOI: 10.3847/1538-4357/ac74bb.

153. Soares-Santos M. et al. First Measurement of the Hubble Constant from a Dark Standard Siren Using the Dark Energy Survey Galaxies and the LIGO/Virgo Binary–Black-Hole Merger GW170814. Astrophysical Journal Letters, 2019, vol. 876, no. 1, p. L7. DOI: 10.3847/2041-8213/ab14f1.

154. Abbott B. P. et al. A Gravitational-Wave Measurement of the Hubble Constant Following the Second Observing Run of Advanced LIGO and Virgo. Astrophysical Journal, 2021, vol. 909, no. 2, p. 218. DOI: 10.3847/1538-4357/abdcb7.

155. Abbott B. P. et al. Tests of General Relativity with GW150914. Physical Review Letters, 2016, vol. 116, no. 22, p. 221101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.221101. [Erratum: Physical Review Letters, 2018, vol. 121, p. 129902].

156. Abbott B. P. et al. Tests of General Relativity with GW170817. Physical Review Letters, 2019, vol. 123, no. 1, p. 011102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.011102.

157. Abbott B. P. et al. Tests of General Relativity with the Binary Black Hole Signals from the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1. Physical Review D, 2019, vol. 100, no. 10, p. 104036. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.104036.

158. Abbott R. et al. Tests of General Relativity with Binary Black Holes from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog. Physical Review D, 2021, vol. 103, no. 12, p. 122002. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.122002.

159. Abbott R. et al. Constraints on Dark Photon Dark Matter Using Data from LIGO's and Virgo's Third Observing Run. Physical Review D, 2022, vol. 105, no. 6, p. 063030. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.063030. [Erratum: Physical Review D, 2024, vol. 109, p. 089902].

160. Abac A. G. et al. Ultralight Vector Dark Matter Search Using Data from the KAGRA O3GK Run. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2403.03004.

161. Abbott R. et al. All-Sky Search for Short Gravitational-Wave Bursts in the Third Advanced LIGO and Advanced Virgo Run. Physical Review D, 2021, vol. 104, no. 12, p. 122004. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.122004.

162. Abbott R. et al. All-Sky Search for Continuous Gravitational Waves from Isolated Neutron Stars in the Early O3 LIGO Data. Physical Review D, 2021, vol. 104, no. 8, p. 082004. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.082004.

163. Abbott R. et al. All-Sky Search for Long-Duration Gravitational-Wave Bursts in the Third Advanced LIGO and Advanced Virgo Run. Physical Review D, 2021, vol. 104, no. 10, p. 102001. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.102001.

164. Saleem M. et al. The Science Case for LIGO-India. Classical and Quantum Gravity, 2022, vol. 39, no. 2, p. 025004. DOI: 10.1088/1361-6382/ac3b99.

165. Abbott B. et al. Setting Upper Limits on the Strength of Periodic Gravitational Waves Using the First Science Data from the GEO 600 and LIGO Detectors. Physical Review D, 2004, vol. 69, p. 082004. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.082004.

166. Punturo M. et al. The Einstein Telescope: A Third-Generation Gravitational Wave Observatory. Classical and Quantum Gravity, 2010, vol. 27, p. 194002. DOI: 10.1088/0264-9381/27/19/194002.

167. Branchesi M. et al. Science with the Einstein Telescope: A Comparison of Different Designs. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2023, no. 07, p. 068. DOI: 10.1088/1475-7516/2023/07/068.

168. Reitze D. et al. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1907.04833. Available at: http://arxiv.org/abs/1907.04833.

169. Evans M. et al. Cosmic Explorer: A Submission to the NSF MPSAC ngGW Subcommittee. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2306.13745.

170. Maggiore M. et al. Science Case for the Einstein Telescope. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2020, no. 03, p. 050. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/03/050.

171. Zhang T., Yang H., Martynov D., Schmidt P., Miao H. Gravitational-Wave Detector for Postmerger Neutron Stars: Beyond the Quantum Loss Limit of the Fabry-Perot-Michelson Interferometer. Physical Review X, 2023, vol. 13, no. 2, p. 021019. DOI: 10.1103/PhysRevX.13.021019.

172. Abbott B. P. et al. Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo, and KAGRA. Living Reviews in Relativity, 2018, vol. 21, no. 1, p. 3. DOI: 10.1007/s41114-020-00026-9.

173. Abbott B. P. et al. Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors. Classical and Quantum Gravity, 2017, vol. 34, no. 4, p. 044001. DOI: 10.1088/1361-6382/aa51f4.

174. Amaro-Seoane P. et al. Laser Interferometer Space Antenna. 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1702.00786.

175. Lisa Pathfinder. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1903.08924.

176. Luo J. et al. TianQin: A Space-Borne Gravitational Wave Detector. Classical and Quantum Gravity, 2016, vol. 33, no. 3, p. 035010. DOI: 10.1088/0264-9381/33/3/035010.

177. Hu W.-R., Wu Y.-L. The Taiji Program in Space for Gravitational Wave Physics and the Nature of Gravity. National Science Review, 2017, vol. 4, no. 5, pp. 685–686. DOI: 10.1093/nsr/nwx116.

178. Luo J. et al. The First Round Result from the TianQin-1 Satellite. Classical and Quantum Gravity, 2020, vol. 37, no. 18, p. 185013. DOI: 10.1088/1361-6382/aba66a.

179. Wu Y.-L. et al. China's First Step Towards Probing the Expanding Universe and the Nature of Gravity Using a Space-Borne Gravitational Wave Antenna. Communications Physics, 2021, vol. 4, no. 1, p. 34. DOI: 10.1038/s42005-021-00529-z. Available at: https://doi.org/10.1038/s42005-021-00529-z.

180. Kawamura S. et al. The Japanese Space Gravitational Wave Antenna DECIGO. Classical and Quantum Gravity, 2006, vol. 23, pp. S125–S132. DOI: 10.1088/0264-9381/23/8/S17.

181. Sazhin M. V. Opportunities for Detecting Utralong Gravitational Waves. Soviet Astronomy, 1978, vol. 22, pp. 36–38.

182. Detweiler S. Pulsar Timing Measurements and the Search for Gravitational Waves. Astrophysical Journal, 1979, vol. 234, pp. 1100–1104. DOI: 10.1086/157593.

183. Hellings R. W., Downs G. S. Upper Limits on the Isotropic Gravitational Radiation Background from Pulsar Timing Analysis. Astrophysical Journal Letters, 1983, vol. 265, pp. L39–L42. DOI: 10.1086/183954.

184. Geiger R. Future Gravitational Wave Detectors Based on Atom Interferometry. In: Gravitation: From the Hubble Length to the Planck Length, 2017, pp. 285–313. DOI: 10.1142/9789813141766_0008.

185. Gao D., Wang J., Zhan M. Atomic Interferometric Gravitational-Wave Space Observatory (AIGSO). Communications in Theoretical Physics, 2018, vol. 69, no. 1, p. 37. DOI: 10.1088/0253-6102/69/1/37.

186. Nishizawa A. et al. Neutron Displacement Noise-Free Interferometer for Gravitational-Wave Detection. Physical Review D, 2022, vol. 105, no. 12, p. 124017. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.124017.

187. Ajith P. et al. The Lunar Gravitational-Wave Antenna: Mission Studies and Science Case. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.09181.

188. Coughlin M., Harms J. Constraining the Gravitational Wave Energy Density of the Universe Using Earth's Ring. Physical Review D, 2014, vol. 90, no. 4, p. 042005. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.042005.

189. Li H. et al. Probing Primordial Gravitational Waves: Ali CMB Polarization Telescope. National Science Review, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 145–154. DOI: 10.1093/nsr/nwy019.

190. Book L. G., Flanagan E. E. Astrometric Effects of a Stochastic Gravitational Wave Background. Physical Review D, 2011, vol. 83, p. 024024. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.024024.

191. Armstrong J. W. Low-Frequency Gravitational Wave Searches Using Spacecraft Doppler Tracking. Living Reviews in Relativity, 2006, vol. 9, no. 1, p. 1. DOI: 10.12942/lrr-2006-1. Available at: https://doi.org/10.12942/lrr-2006-1.

192. Farr B., Ochsner E., Farr W. M., O'Shaughnessy R. A More Effective Coordinate System for Parameter Estimation of Precessing Compact Binaries from Gravitational Waves. Physical Review D, 2014, vol. 90, no. 2, p. 024018. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.024018.

193. Poisson E., Will C. M. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. Cambridge University Press, 2014. ISBN: 9781107032866. Available at: https://books.google.co.uk/books?id=PZ5cAwAAQBAJ.

194. Apostolatos T. A., Cutler C., Sussman G. J., Thorne K. S. Spin-Induced Orbital Precession and its Modulation of the Gravitational Waveforms from Merging Binaries. Physical Review D, 1994, vol. 49, pp. 6274–6297. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.6274. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.6274.

195. Damour T. Coalescence of Two Spinning Black Holes: An Effective One-Body Approach. Physical Review D, 2001, vol. 64, p. 124013. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.124013. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.124013.

196. Ajith P. et al. Inspiral-Merge-Ringdown Waveforms for Black-Hole Binaries with Nonprecessing Spins. Physical Review Letters, 2011, vol. 106, p. 241101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.241101. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.241101.

197. Santamaría L. et al. Matching Post-Newtonian and Numerical Relativity Waveforms: Systematic Errors and a New Phenomenological Model for Nonprecessing Black Hole Binaries. Physical Review D, 2010, vol. 82, p. 064016. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.064016. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.064016.

198. Cutler C., Flanagan E. E. Gravitational Waves from Merging Compact Binaries: How Accurately Can One Extract the Binary's Parameters from the Inspiral Waveform? Physical Review D, 1994, vol. 49, pp. 2658–2697. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.2658.

199. Poisson E., Will C. M. Gravitational Waves from Inspiraling Compact Binaries: Parameter Estimation Using Second Post-Newtonian Waveforms. Physical Review D, 1995, vol. 52, pp. 848–855. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.848.

200. Hannam M. et al. Simple Model of Complete Precessing Black-Hole-Binary Gravitational Waveforms. Physical Review Letters, 2014, vol. 113, no. 15, p. 151101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.151101.

201. Schmidt P., Ohme F., Hannam M. Towards Models of Gravitational Waveforms from Generic Binaries II: Modelling Precession Effects with a Single Effective Precession Parameter. Physical Review D, 2015, vol. 91, no. 2, p. 024043. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.024043.

202. Abbott B. P. et al. Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914. Physical Review Letters, 2016, vol. 116, no. 24, p. 241102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.241102.

203. Vitale S., Lynch R., Raymond V., Sturani R., Veitch J., Graff P. Parameter Estimation for Heavy Binary-Black Holes with Networks of Second-Generation Gravitational-Wave Detectors. Physical Review D, 2017, vol. 95, no. 6, p. 064053. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.064053.

204. Wade L., Creighton J. D. E., Ochsner E., Lackey B. D., Farr B. F., Littenberg T. B., Raymond V. Systematic and Statistical Errors in a Bayesian Approach to the Estimation of the Neutron-Star Equation of State Using Advanced Gravitational Wave Detectors. Physical Review D, 2014, vol. 89, p. 103012. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.103012. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.103012.

205. Blanchet L. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. Living Reviews in Relativity, 2014, vol. 17, p. 2. DOI: 10.12942/lrr-2014-2.

206. Buonanno A., Iyer B., Ochsner E., Pan Y., Sathyaprakash B. S. Comparison of Post-Newtonian Templates for Compact Binary Inspiral Signals in

Gravitational-Wave Detectors. Physical Review D, 2009, vol. 80, p. 084043. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.084043.

207. Kidder L. E., Will C. M., Wiseman A. G. Spin Effects in the Inspiral of Coalescing Compact Binaries. Physical Review D, 1993, vol. 47, no. 10, pp. R4183–R4187. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.R4183.

208. Blanchet L., Damour T., Iyer B. R., Will C. M., Wiseman A. G. Gravitational-Radiation Damping of Compact Binary Systems to Second Post-Newtonian Order. Physical Review Letters, 1995, vol. 74, pp. 3515–3518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.3515. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.3515.

209. Grandclement P., Novak J. Spectral Methods for Numerical Relativity. Living Reviews in Relativity, 2009, vol. 12, p. 1. DOI: 10.12942/lrr-2009-1.

210. Bishop N. T., Rezzolla L. Extraction of Gravitational Waves in Numerical Relativity. Living Reviews in Relativity, 2016, vol. 19, p. 2. DOI: 10.1007/s41114-016-0001-9.

211. Hughes S. A. Gravitational Waves from Merging Compact Binaries. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 2009, vol. 47, pp. 107–157. DOI: 10.1146/annurev-astro-082708-101711.

212. Pretorius F. Numerical Relativity Using a Generalized Harmonic Decomposition. Classical and Quantum Gravity, 2005, vol. 22, pp. 425–452. DOI: 10.1088/0264-9381/22/2/014.

213. Pretorius F. Evolution of Binary Black Hole Spacetimes. Physical Review Letters, 2005, vol. 95, p. 121101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.121101.

214. Bernuzzi S., Dietrich T. Gravitational Waveforms from Binary Neutron Star Mergers with High-Order Weighted-Essentially-Nonoscillatory Schemes in Numerical Relativity. Physical Review D, 2016, vol. 94, no. 6, p. 064062. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.064062.

215. Foucart F. et al. Gravitational Waveforms from Spectral Einstein Code Simulations: Neutron Star-Neutron Star and Low-Mass Black Hole-Neutron Star Binaries. Physical Review D, 2019, vol. 99, no. 4, p. 044008. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.044008.

216. Jani K., Healy J., Clark J. A., London L., Laguna P., Shoemaker D. Georgia Tech Catalog of Gravitational Waveforms. Classical and Quantum Gravity, 2016, vol. 33, no. 20, p. 204001. DOI: 10.1088/0264-9381/33/20/204001.

217. Mroue A. H. et al. Catalog of 174 Binary Black Hole Simulations for Gravitational Wave Astronomy. Physical Review Letters, 2013, vol. 111, no. 24, p. 241104. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.241104.

218. Boyle M. et al. The SXS Collaboration Catalog of Binary Black Hole Simulations. Classical and Quantum Gravity, 2019, vol. 36, no. 19, p. 195006. DOI: 10.1088/1361-6382/ab34e2.

219. Abac A. G. et al. Search for Eccentric Black Hole Coalescences during the Third Observing Run of LIGO and Virgo. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2308.03822.

220. Thorne K. S. Multipole Expansions of Gravitational Radiation. Reviews of Modern Physics, 1980, vol. 52, pp. 299–339. DOI: 10.1103/RevModPhys.52.299. Available at: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.299.

221. Kidder L. E. Using Full Information When Computing Modes of Post-Newtonian Waveforms from Inspiralling Compact Binaries in Circular Orbit. Physical Review D, 2008, vol. 77, p. 044016. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.044016.

222. Goldberg J. N., MacFarlane A. J., Newman E. T., Rohrlich F., Sudarshan E. C. G. Spin sss Spherical Harmonics and Edth. Journal of Mathematical Physics, 1967, vol. 8, p. 2155. DOI: 10.1063/1.1705135.

223. Szekeres P. The Gravitational Compass. Journal of Mathematical Physics, 1965, vol. 6, pp. 1387–1391. DOI: 10.1063/1.1704788.

224. Buonanno A., Cook G. B., Pretorius F. Inspiral, Merger, and Ring-Down of Equal-Mass Black-Hole Binaries. Physical Review D, 2007, vol. 75, p. 124018. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.124018.

225. Berti E., Cardoso V., Starinets A. O. Quasinormal Modes of Black Holes and Black Branes. Classical and Quantum Gravity, 2009, vol. 26, p. 163001. DOI: 10.1088/0264-9381/26/16/163001.

226. Hawking S. W. Black Holes in General Relativity. Communications in Mathematical Physics, 1972, vol. 25, pp. 152–166. DOI: 10.1007/BF01877517.

227. Teukolsky S. A. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational Electromagnetic and Neutrino Field Perturbations. Astrophysical Journal, 1973, vol. 185, pp. 635–647. DOI: 10.1086/152444.

228. Press W. H., Teukolsky S. A. Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr Metric. Astrophysical Journal, 1973, vol. 185, pp. 649–674. DOI: 10.1086/152445.

229. Giesler M., Isi M., Scheel M. A., Teukolsky S. Black Hole Ringdown: The Importance of Overtones. Physical Review X, 2019, vol. 9, no. 4, p. 041060. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.041060.

230. Chandrasekhar S., Detweiler S. L. The Quasi-Normal Modes of the Schwarzschild Black Hole. Proceedings of the Royal Society of London A, 1975, vol. 344, pp. 441–452. DOI: 10.1098/rspa.1975.0112.

231. Thrane E., Lasky P. D., Levin Y. Challenges Testing the No-Hair Theorem with Gravitational Waves. Physical Review D, 2017, vol. 96, no. 10, p. 102004. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.102004.

232. Carullo G. et al. Empirical Tests of the Black Hole No-Hair Conjecture Using Gravitational-Wave Observations. Physical Review D, 2018, vol. 98, no. 10, p. 104020. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.104020.

233. Baibhav V., Berti E., Cardoso V., Khanna G. Black Hole Spectroscopy: Systematic Errors and Ringdown Energy Estimates. Physical Review D, 2018, vol. 97, no. 4, p. 044048. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.044048.

234. Israel W. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. Physical Review, 1967, vol. 164, pp. 1776–1779. DOI: 10.1103/PhysRev.164.1776.

235. Carter B. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. Physical Review Letters, 1971, vol. 26, pp. 331–333. DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.331.

236. Husa S. et al. Frequency-Domain Gravitational Waves from Nonprecessing Black-Hole Binaries. I. New Numerical Waveforms and Anatomy of the Signal. Physical Review D, 2016, vol. 93, no. 4, p. 044006. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.044006.

237. Buonanno A., Damour T. Effective One-Body Approach to General Relativistic Two-Body Dynamics. Physical Review D, 1999, vol. 59, p. 084006. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.084006.

238. Buonanno A., Damour T. Transition from Inspiral to Plunge in Binary Black Hole Coalescences. Physical Review D, 2000, vol. 62, p. 064015. DOI: 10.1103/PhysRevD.62.064015.

239. Damour T., Nagar A. The Effective One Body Description of the Two-Body Problem. Fundamental Theories of Physics, 2011, vol. 162, pp. 211–252. DOI: 10.1007/978-90-481-3015-3_7.

240. Pan Y. et al. Inspiral-Merger-Ringdown Multipolar Waveforms of Nonspinning Black-Hole Binaries Using the Effective-One-Body Formalism. Physical Review D, 2011, vol. 84, p. 124052. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.124052.

241. Ramos-Buades A. et al. Next Generation of Accurate and Efficient Multipolar Precessing-Spin Effective-One-Body Waveforms for Binary Black Holes. Physical Review D, 2023, vol. 108, no. 12, p. 124037. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.124037.

242. Mihaylov D. P., Ossokine S., Buonanno A., Estelles H., Pompili L., Pürrer M., Ramos-Buades A. pySEOBNR: A Software Package for the Next Generation of Effective-One-Body Multipolar Waveform Models. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2303.18203.

243. Taracchini A., Pan Y., Buonanno A., Barausse E., Boyle M., Chu T., Lovelace G., Pfeiffer H. P., Scheel M. A. Prototype Effective-One-Body Model for Nonprecessing Spinning Inspiral-Merger-Ringdown Waveforms. Physical Review D, 2012, vol. 86, p. 024011. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.024011.

244. Taracchini A. et al. Effective-One-Body Model for Black-Hole Binaries with Generic Mass Ratios and Spins. Physical Review D, 2014, vol. 89, no. 6, p. 061502. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.061502.

245. Babak S., Taracchini A., Buonanno A. Validating the Effective-One-Body Model of Spinning, Precessing Binary Black Holes Against Numerical Relativity. Physical Review D, 2017, vol. 95, no. 2, p. 024010. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.024010.

246. Bohé A. et al. Improved Effective-One-Body Model of Spinning, Nonprecessing Binary Black Holes for the Era of Gravitational-Wave Astrophysics with Advanced Detectors. Physical Review D, 2017, vol. 95, no. 4, p. 044028. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.044028.

247. Ossokine S. et al. Multipolar Effective-One-Body Waveforms for Precessing Binary Black Holes: Construction and Validation. Physical Review D, 2020, vol. 102, no. 4, p. 044055. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.044055.

248. Ramos-Buades A., Buonanno A., Khalil M., Ossokine S. Effective-One-Body Multipolar Waveforms for Eccentric Binary Black Holes with Nonprecessing Spins. Physical Review D, 2022, vol. 105, no. 4, p. 044035. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.044035.

249. Ajith P. et al. Phenomenological Template Family for Black-Hole Coalescence Waveforms. Classical and Quantum Gravity, 2007, vol. 24, pp. S689–S700. DOI: 10.1088/0264-9381/24/19/S31.

250. Khan S., Husa S., Hannam M., Ohme F., Pürrer M., Jiménez Forteza X., Bohé A. Frequency-Domain Gravitational Waves from Nonprecessing Black-Hole Binaries. II. A Phenomenological Model for the Advanced Detector Era. Physical Review D, 2016, vol. 93, no. 4, p. 044007. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.044007.

251. Khan S., Chatziioannou K., Hannam M., Ohme F. Phenomenological Model for the Gravitational-Wave Signal from Precessing Binary Black Holes with Two-Spin Effects. Physical Review D, 2019, vol. 100, no. 2, p. 024059. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.024059.

252. Pratten G., Husa S., Garcia-Quiros C., Colleoni M., Ramos-Buades A., Estelles H., Jaume R. Setting the Cornerstone for a Family of Models for Gravitational Waves from Compact Binaries: The Dominant Harmonic for Nonprecessing Quasicircular Black Holes. Physical Review D, 2020, vol. 102, no. 6, p. 064001. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.064001.

253. Pratten G. et al. Computationally Efficient Models for the Dominant and Subdominant Harmonic Modes of Precessing Binary Black Holes. Physical Review D, 2021, vol. 103, no. 10, p. 104056. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.104056.

254. Thompson J. E., Hamilton E., London L., Ghosh S., Kolitsidou P., Hoy C., Hannam M. PhenomXO4a: A Phenomenological Gravitational-Wave Model for Precessing Black-Hole Binaries with Higher Multipoles and Asymmetries. Physical Review D, 2024, vol. 109, no. 6, p. 063012. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.063012.

255. Dietrich T. et al. Matter Imprints in Waveform Models for Neutron Star Binaries: Tidal and Self-Spin Effects. Physical Review D, 2019, vol. 99, no. 2, p. 024029. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.024029.

256. Field S. E., Galley C. R., Hesthaven J. S., Kaye J., Tiglio M. Fast Prediction and Evaluation of Gravitational Waveforms Using Surrogate Models. Physical Review X, 2014, vol. 4, no. 3, p. 031006. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.031006.

257. Pürrer M. Frequency Domain Reduced Order Models for Gravitational Waves from Aligned-Spin Compact Binaries. Classical and Quantum Gravity, 2014, vol. 31, no. 19, p. 195010. DOI: 10.1088/0264-9381/31/19/195010.

258. Pürrer M. Frequency Domain Reduced Order Model of Aligned-Spin Effective-One-Body Waveforms with Generic Mass-Ratios and Spins. Physical Review D, 2016, vol. 93, no. 6, p. 064041. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.064041.

259. Cotesta R., Marsat S., Pürrer M. Frequency Domain Reduced Order Model of Aligned-Spin Effective-One-Body Waveforms with Higher-Order Modes. Physical Review D, 2020, vol. 101, no. 12, p. 124040. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.124040.

260. Blackman J., Field S. E., Galley C. R., Szilágyi B., Scheel M. A., Tiglio M., Hemberger D. A. Fast and Accurate Prediction of Numerical Relativity Waveforms from Binary Black Hole Coalescences Using Surrogate Models. Physical Review Letters, 2015, vol. 115, no. 12, p. 121102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.121102.

261. Varma V., Field S. E., Scheel M. A., Blackman J., Gerosa D., Stein L. C., Kidder L. E., Pfeiffer H. P. Surrogate Models for Precessing Binary Black Hole Simulations with Unequal Masses. Physical Review Research, 2019, vol. 1, p. 033015. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033015.

262. Varma V., Field S. E., Scheel M. A., Blackman J., Kidder L. E., Pfeiffer H. P. Surrogate Model of Hybridized Numerical Relativity Binary Black Hole

Waveforms. Physical Review D, 2019, vol. 99, no. 6, p. 064045. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.064045.

263. Islam T., Varma V., Lodman J., Field S. E., Khanna G., Scheel M. A., Pfeiffer H. P., Gerosa D., Kidder L. E. Eccentric Binary Black Hole Surrogate Models for the Gravitational Waveform and Remnant Properties: Comparable Mass, Nonspinning Case. Physical Review D, 2021, vol. 103, no. 6, p. 064022. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.064022.

264. Thomas L. M., Pratten G., Schmidt P. Accelerating Multimodal Gravitational Waveforms from Precessing Compact Binaries with Artificial Neural Networks. Physical Review D, 2022, vol. 106, no. 10, p. 104029. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.104029.

265. Moore C. J., Gair J. R. Novel Method for Incorporating Model Uncertainties into Gravitational Wave Parameter Estimates. Physical Review Letters, 2014, vol. 113, p. 251101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.251101.

266. Moore C. J., Berry C. P. L., Chua A. J. K., Gair J. R. Improving Gravitational-Wave Parameter Estimation Using Gaussian Process Regression. Physical Review D, 2016, vol. 93, no. 6, p. 064001. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.064001.

267. Doctor Z., Farr B., Holz D. E., Pürrer M. Statistical Gravitational Waveform Models: What to Simulate Next? Physical Review D, 2017, vol. 96, no. 12, p. 123011. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.123011.

268. Williams D., Heng I. S., Gair J., Clark J. A., Khamesra B. Precessing Numerical Relativity Waveform Surrogate Model for Binary Black Holes: A Gaussian Process Regression Approach. Physical Review D, 2020, vol. 101, no. 6, p. 063011. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.063011.

269. Allen B., Anderson W. G., Brady P. R., Brown D. A., Creighton J. D. E. FINDCHIRP: An Algorithm for Detection of Gravitational Waves from Inspiraling Compact Binaries. Physical Review D, 2012, vol. 85, p. 122006. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.122006.

270. Pürrer M., Haster C.-J. Gravitational Waveform Accuracy Requirements for Future Ground-Based Detectors. Physical Review Research, 2020, vol. 2, no. 2, p. 023151. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.023151.

271. Ajith P. et al. A Template Bank for Gravitational Waveforms from Coalescing Binary Black Holes. I. Non-Spinning Binaries. Physical Review D, 2008, vol. 77, p. 104017. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.104017. [Erratum: Physical Review D, 2009, vol. 79, p. 129901.]

272. Veitch J. et al. Parameter Estimation for Compact Binaries with Ground-Based Gravitational-Wave Observations Using the LALInference Software Library. Physical Review D, 2015, vol. 91, no. 4, p. 042003. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.042003.

273. Williams M. J., Veitch J., Messenger C. Nested Sampling with Normalizing Flows for Gravitational-Wave Inference. Physical Review D, 2021, vol. 103, no. 10, p. 103006. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.103006.

274. Edwards T. D. P., Wong K. W. K., Lam K. K. H., Coogan A., Foreman-Mackey D., Isi M., Zimmerman A. ripple: Differentiable and Hardware-Accelerated

Waveforms for Gravitational Wave Data Analysis. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2302.05329.

275. Gerosa D., Kesden M., Sperhake U., Berti E., O'Shaughnessy R. Multi-Timescale Analysis of Phase Transitions in Precessing Black-Hole Binaries. Physical Review D, 2015, vol. 92, p. 064016. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.064016.

276. Romero-Shaw I. M., Gerosa D., Loutrel N. Eccentricity or Spin Precession? Distinguishing Subdominant Effects in Gravitational-Wave Data. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2023, vol. 519, no. 4, pp. 5352–5357. DOI: 10.1093/mnras/stad031.

277. Pang P. T. H., Calderón Bustillo J., Wang Y., Li T. G. F. Potential Observations of False Deviations from General Relativity in Gravitational Wave Signals from Binary Black Holes. Physical Review D, 2018, vol. 98, no. 2, p. 024019. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.024019.

278. Saini P., Favata M., Arun K. G. Systematic Bias on Parametrized Tests of General Relativity Due to Neglect of Orbital Eccentricity. Physical Review D, 2022, vol. 106, no. 8, p. 084031. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.084031.

279. Lewis A. G. M., Zimmerman A., Pfeiffer H. P. Fundamental Frequencies and Resonances from Eccentric and Precessing Binary Black Hole Inspirals. Classical and Quantum Gravity, 2017, vol. 34, no. 12, p. 124001. DOI: 10.1088/1361-6382/aa66f4.

280. Ramos-Buades A., Husa S., Pratten G., Estellés H., García-Quirós C., Mateu-Lucena M., Colleoni M., Jaume R. First Survey of Spinning Eccentric Black Hole Mergers: Numerical Relativity Simulations, Hybrid Waveforms, and Parameter Estimation. Physical Review D, 2020, vol. 101, no. 8, p. 083015. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.083015.

281. Liu X., Cao Z., Zhu Z.-H. A Higher-Multipole Gravitational Waveform Model for an Eccentric Binary Black Holes Based on the Effective-One-Body-Numerical-Relativity Formalism. Classical and Quantum Gravity, 2022, vol. 39, no. 3, p. 035009. DOI: 10.1088/1361-6382/ac4119.

282. Liu X., Cao Z., Zhu Z.-H. Effective-One-Body Numerical-Relativity Waveform Model for Eccentric Spin-Precessing Binary Black Hole Coalescence. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2310.04552.

283. Peebles P. J. E. The large-scale structure of the universe. – Princeton university press, 1980. – T. 96.

284. Landau L., Lifchitz E. Theoretical physics. Field theory. – 2004.

285. Nicolis G., Prigogine I. Exploring complexity: An introduction. – 1989.

286. Strong M. D., Crescimanno M. Lagrange point stability for a rotating host mass binary //Physical Review D. – 2020. – T. 102. – №. 2. – C. 024052.

287. ZhanabaevZ.Zh. Fractal model of turbulence in the jet. Proceedings of the SB Acad.of Sci. USSR. TechnicalScienceseries. 1988, Vol.4, pp. 57–60. [inRussian].

288. ZhanabaevZ.Zh., et al. Electrodynamic characteristics ofwire dipole antennas based on fractal curves. Journal of Engineering Science and Technology. 2019, Vol.14, No. 1, pp. 305–320.

289. Feder J. Fractals. Springer Science & Business Media, 2013, 183p

290. Zhanabaev Z. Z., Grevtseva T. Y. Physical fractal phenomena in nanostructured semiconductors //Reviews in Theoretical Science. – 2014. – Т. 2. –№. 3. – С. 211-259.

291. Zhanabaev Z.Zh., Kozhagulov Y.T. A Genetic Model for Scale-Invariant Neural Networks // Journal of Neuroscience and Neuriengineering. – 2013. – Vol. 2.– P. 1-5.

292. Zhanabaev Z. Z., Ussipov N. M., Khokhlov S. A. Scale-invariant and wave nature of the Hubble parameter //Eurasian Physical Technical Journal. – 2021.– Т. 18. – №. 2 (36). – С. 81-89.

293. Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the nonextensivity parameter q in some applications of Tsallis statistics and Lévy distributions //Physical Review Letters. – 2000. – Т. 84. – №. 13. – С. 2770.

294. Жанабаев З. Ж., Усипов Н. М. SCALE-INVARIANCE OF MANY GALAXIES //Вестник Казахского национального университета. Серия физическая. – 2019. – №. 2. – С. 27-32.

295. Ussipov N. et al. FRACTAL DIMENSION OF STAR CLUSTERS //Eurasian Physical Technical Journal. – 2024. – Т. 21. – №. 3.

296. Razzano Massimiliano, et al. GWitchHunters: Machine learning and citizen science to improve the performance of gravitational wave detector. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2023, 1048, 167959. doi: 10.1016/j.nima.2022.167959

297. Schäfer Marlin B., et al. Training strategies for deep learning gravitational-wave searches. Physical Review D, 2022, 105.4, 043002. doi: 10.1103/PhysRevD.105.043002

298. Xia H., Shao L., Zhao J., Cao Z. Improved deep learning techniques in gravitational-wave data analysis. Physical Review D, 2021, 103(2), 024040. doi: 10.1103/PhysRevD.103.024040

299. Aveiro João, et al. Identification of binary neutron star mergers in gravitational-wave data using object-detection machine learning models. Physical Review D, 2022, 106.8, 084059. doi 10.1103/PhysRevD.106.084059

300. Zhang Zhen, et al. Modulation signal recognition based on information entropy and ensemble learning. Entropy, 2018, 20.3, 198. doi: 10.3390/e20030198

301. Wang, Hui, et al. A new method of cognitive signal recognition based on hybrid information entropy and DS evidence theory. Mobile Networks and Applications, 2018, 23, 677-685. doi: 10.1007/s11036-018-1000-8

302. Li Han, Yanzhu Hu, Song Wang. A novel blind signal detector based on the entropy of the power spectrum subband energy ratio. Entropy, 2021, 23.4, 448. doi: 10.3390/e23040448

303. Gabbard H, Williams M, Hayes F, Messenger C, Matching matched filtering with deep networks for gravitational-wave astronomy, Phys. Rev. Lett., 120(14) 141103 (2018). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.141103

304. Kang Y, Liu C, Shao L, Electromagnetic follow-up observations of binary neutron star mergers with early warnings from decihertz gravitational-wave observatories, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 515(1): 739-748 (2022). https://doi.org/10.1093/mnras/stac1738

305. Qiu R, Krastev P, Gill K, Berger E, Deep learning detection and classification of gravitational waves from neutron star-black hole mergers. Physics Letters B, 840: 137850 (2023). https://doi.org/10.1016/j.physletb.2023.137850

306. Mitra A, Shukirgaliyev B, Abylkairov Y, Abdikamalov E, Exploring supernova gravitational waves with machine learning. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 520(2): 2473-2483 (2023). https://doi.org/10.1093/mnras/stad169

307. Chapman-Bird C, Berry C, Woan G, Rapid determination of LISA sensitivity to extreme mass ratio inspirals with machine learning, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 522(4): 6043-6054 (2023). https://doi.org/10.1093/mnras/stad1397

308. George D & Huerta E, Deep Learning for real-time gravitational wave detection and parameter estimation: Results with Advanced LIGO data, Physics Letters B, 778: 64-70 (2018). https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.12.053

309. Dreissigacker C, Sharma R, Messenger C, Zhao R, Prix R, Deep-learning continuous gravitational waves, Physical Review D, 100(4): 044009 (2019). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.044009

310. Wang H, Wu S, Cao Z, Liu X, Zhu J, Gravitational-wave signal recognition of LIGO data by deep learning, Physical Review D, 101(10): 104003 (2020). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.104003

311. Ormiston R, Nguyen T, Coughlin M, Adhikari R, Katsavounidis E, Noise reduction in gravitational-wave data via deep learning. Physical Review Research, 2(3): 033066 (2020). https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033066

312. Zhanabaev Z & Ussipov N, INFORMATION-ENTROPY METHOD FOR DETECTING GRAVITATIONAL WAVE SIGNALS, Eurasian Physical Technical Journal, 20.2 (44): 79-86 (2023). https://doi.org/10.31489/2023NO2/79-86

313. Nalband S, Prince A, Agrawal A, Entropy-based feature extraction and classification of vibroarthographic signal using complete ensemble empirical mode decomposition with adaptive noise. IET Science, Measurement & Technology, 12(3): 350-359 (2018). https://doi.org/10.1049/iet-smt.2017.0284

314. Chawale M, Mohod S, Chandak M, Epileptic EEG Signal Classification using Wavelet Time Entropy. Technology Reports of Kansai University, 62: 401-411 (2020). https://doi.org//10.32628/IJSRST229174

315. LIGO Scientific Collaboration, LALSuite: LIGO Scientific Collaboration Algorithm Library Suite, Astrophysics Source Code Library, record ascl:2012.021 (2018). https://doi.org/10.7935/GT1W-FZ16

316. Bohé A, Shao L, Taracchini A, Buonanno A, Babak S, et al., Improved effective-one-body model of spinning, nonprecessing binary black holes for the era of gravitational-wave astrophysics with advanced detectors, Phys. Rev. D, 95(4), p.044028 (2017). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.044028

317. Messina F, Dudi R, Nagar A, Bernuzzi S, Quasi-5.5PN TaylorF2 approximant for compact binaries: point-mass phasing and impact on the tidal polarizability inference, Phys. Rev. D 99(12) 124051 (2019). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.124051

318. Matas A. et al. Aligned-spin neutron-star–black-hole waveform model based on the effective-one-body approach and numerical-relativity simulations //Physical Review D. – 2020. – Т. 102. – №. 4. – С. 043023.

319. Gebhard T D, Kilbertus N, Harry I, et al. Convolutional neural networks: A magic bullet for gravitational-wave detection?. Physical Review D, 2019, 100(6): 063015.

320. Usman S, Nitz A, Harry I, Biwer C, Brown D, et al., The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence. Classical and Quantum Gravity, 33(21), p.215004 (2016). https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/21/215004

321. Welch P, The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 15(2) 70–73 (1967). https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901

322. Ussipov N. et al. Classification of Gravitational Waves from Black Hole-Neutron Star Mergers with Machine Learning //Journal of Astronomy and Space Sciences. – 2024. – Т. 41. – №. 3. – С. 149-158.

323. Усипов Н. и др. ENTROPY OF GRAVITATIONAL WAVES //«Доклады НАН РК». – 2024. – №. 3. – С. 47-56.